Cours élémentaire d'algèbre linéaire sous forme d'exercices - Deuxième édition

R. Rolland

Table des matières

Chapitre 1

Espace vectoriel

Introduction

En géométrie plane, il est d'usage d'introduire la notion de vecteur. L'ensemble de ces vecteurs du plan est muni de deux opérations de base : l'addition des vecteurs, et la multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Bien d'autres ensembles sont munis de deux opérations possédant des propriétés analogues à celles-ci (des ensembles de fonctions, de polynômes, etc..). C'est cette structure commune, appelée structure d'espace vectoriel, que nous allons étudier. Compte tenu de l'origine concrète que nous avons indiquée, il ne faudra pas s'étonner du langage géométrique employé. De plus il est conseillé de s'appuyer dans une certaine mesure sur cette analogie pour nourrir son intuition concernant les structures introduites.

1.1 La structure d'espace vectoriel

Définition 1.1.1 *Un* **espace vectoriel** *E sur un corps commutatif K (appelé corps des scalaires) est un ensemble non vide muni d'une opération interne (addition qu'on notera $+$) telle que*

EV-1) E est un **groupe abélien** *pour l'addition.*

et d'une opération externe, application de $K \times E$ dans E, qui à un couple (λ, x) associe l'élément $\lambda.x$ (qu'on notera aussi quand aucune confusion n'en résulte λx) telle que

EV-2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

EV-3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

EV-4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

EV-5) $1x = x$.

Ex-1 Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K$, $0x = 0$ et $\lambda 0 = 0$ (attention par abus de notation il est d'usage de noter 0 le vecteur nul et aussi le zéro du corps de base ; ce sont bien sûr des objets différents. Le lecteur prendra garde dans un premier temps à s'assurer qu'il est capable de bien distinguer ces deux objets dans les diverses formules écrites).

Attention l'intuition géométrique a aussi ses limites, notamment quand le corps de base est de caractéristique non nulle.

Ex-2 Montrer que si K est un corps de caractéristique 2, pour tout $x \in E$, $x + x = 0$. Que se passe-t-il pour un corps de caractéristique p ?

1.2 Premiers exemples d'espaces vectoriels

On laisse le soin au lecteur de préciser les opérations et de vérifier les propriétés requises dans les exemples suivants.

Ex-3 (Géométrie) L'ensemble des vecteurs de la géométrie plane ainsi que l'ensemble des vecteurs de la géométrie dans l'espace sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Ex-4 (Nombres complexes) $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Ex-5 (Nombres réels) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Ex-6 (Fonctions) L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Ex-7 L'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Ex-8 Tout corps commutatif K est un espace vectoriel sur lui même.

Ex-9 K^n est un espace vectoriel sur K.

Ex-10 (Polynômes) Les polynômes à r variables et à coefficients dans un corps K forment un espace vectoriel sur K.

Ex-11 Les polynômes à r variables, à coefficients dans un corps K et de degré total $\leq n$, forment un espace vectoriel sur K.

Ex-12 Les polynômes à r variables, à coefficients dans un corps K et dont les degrés partiels par rapport à certaines des variables sont bornés, est un espace vectoriel sur K.

Ex-13 Si K est un sous corps d'un corps commutatif K_1, alors K_1 est un espace vectoriel sur K.

Ex-14 Soit A un ensemble non vide, et $\mathcal{F}(A, E)$ l'ensemble des fonctions de A dans un espace vectoriel E sur le corps K. Alors $\mathcal{F}(A, E)$ est un espace vectoriel sur K.

Ex-15 (Espace produit) Si E et F sont deux espaces vectoriels sur K, le produit $E \times F$ est un espace vectoriel sur K.

Ex-16 (Suites) Montrer que les suites d'éléments de K forment un espace vectoriel sur K.

Ex-17 Que dire des suites réelles ? Des suites réelles qui convergent vers 0 ? Des suites réelles qui divergent vers $+\infty$? Des suites réelles croissantes ? Des suites réelles convergentes ?

Ex-18 (Algèbre de Boole) Soit A un ensemble non vide et $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. On définit sur $\mathcal{P}(A)$ la somme de deux parties comme étant leur différence symétrique ($U + V = U \Delta V = (U - V) \cup (V - U)$). De plus on définit le produit d'un élément de $\mathcal{P}(A)$ par un élément du corps à deux éléments $\{0, 1\}$ par $0.U = \emptyset$ et $1.U = U$. Montrer que dans ces conditions $\mathcal{P}(A)$ est un espace vectoriel sur le corps à deux éléments.
Remarque : Si de plus on tient compte de l'opération multiplication définie comme étant l'intersection de deux parties, on a une structure d'algèbre de Boole .

Chapitre 2

Sous espaces vectoriels

Introduction

Comme toujours, lorsqu'on définit une structure, on introduit la notion de sous structure. Ainsi nous étudions maintenant la notion de sous espace vectoriel. Beaucoup d'ensembles intéressants sont des sous espaces vectoriels d'espaces plus gros. Dans ce cas pour montrer que ce sont des espaces vectoriels il n'est pas nécessaire de vérifier toutes les propriétés de l'addition et de la multiplication externe. La stabilité par rapport à ces opérations suffit.

2.1 La sous structure de sous espace vectoriel

Définition 2.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Un sous ensemble F de E est un* **sous espace vectoriel** *de E si c'est un espace vectoriel pour les deux opérations induites par E sur F.*

Ex-1 Montrer qu'un sous ensemble non vide F d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

$$\forall x, y \in F, \quad x + y \in F,$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \quad \lambda x \in F.$$

(on dit alors que F est stable par rapport à ces opérations).

Ceci donne un moyen commode de montrer que des ensembles sont munis d'une structure d'espace vectoriel.

Ex-2 Montrer que l'intersection d'une famille non vide de sous espaces vectoriels d'un espace E est un sous espace de E.

Ex-3 Peut on dire que la réunion d'une famille de sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E ?

Définition 2.1.2 *Soit A un sous ensemble de l'espace vectoriel E. Considérons la famille de tous les sous espaces de E qui contiennent A. Cette famille est non vide puisque E en fait partie. L'intersection des sous espaces de cette famille est appelée le* **sous espace engendré** *par A. On note $[A]$ ce sous espace.*

Ex-4 Le sous espace engendré par A est le plus petit sous espace de E (au sens de l'inclusion des ensembles) contenant A.

2.2 Exemples de sous espaces vectoriels

Ex-5 Montrer que l'ensemble $C(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Ex-6 Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Que peut-on en dire par rapport à $C(\mathbb{R})$?

Ex-7 Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_a(A, E)$ des fonctions définies sur un ensemble non vide A, à valeurs dans un espace vectoriel E, et qui s'annulent en un point fixé $a \in A$, est un sous espace de l'espace $\mathcal{F}(A, E)$ des fonctions de A dans E.

Ex-8 Montrer que l'ensemble des fonctions $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sont paires est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Est-ce aussi vrai pour les fonctions impaires ?

Ex-9 Soit $[a, b]$ un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe un partage $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ tel que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i x_{i+1}[$. Montrer que l'ensemble des fonctions en escalier est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Ex-10 Montrer que les suites de nombres complexes qui convergent vers 0 forment un sous espace vectoriel de l'espace de toutes les suites de nombres complexes.

Ex-11 Soit F l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, affines (i.e. de la forme ax+b) par morceaux (i.e. il existe un partage $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ tel que f soit affine sur chaque intervalle $[x_i x_{i+1}]$). Montrer que F est un sous espace de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

Chapitre 3

Homomorphismes d'espaces vectoriels

Introduction

Nous étudions maintenant les applications d'un espace vectoriel dans un autre (sur un même corps) qui conservent la structure. Ces applications, dites applications linéaires, sont centrales dans la théorie. Nous reviendrons dans la plupart des chapitres qui suivent à leur étude approfondie.

3.1 Application linéaire - Noyau - Image

Définition 3.1.1 *E et F étant deux espace vectoriels sur le même corps K, un* **homomorphisme** *de E dans F (ou encore une* **application linéaire** *de E dans F) est une application f de E dans F telle que*

Hom-1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Hom-2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Dans le cas où $F = E$ on dit que f est un **endomorphisme** *de E, ou encore un* **opérateur** *de E.*

Ex-1 Montrer que si f est une application linéaire $f(0) = 0$.

Ex-2 Montrer que l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0 est un sous espace vectoriel de E.

Ex-2 Montrer que si f est injective alors 0 est le seul élément de E dont l'image soit 0.

Ex-3 Réciproquement, montrer que si 0 est le seul élément de E dont l'image soit 0 alors f est injective.

Ex-4 Montrer que l'image de f (c'est-à-dire $f(E)$), est un sous espace vectoriel de F. On note $Im(f)$ cette image.

Définition 3.1.2 *Si f est un homomorphisme de E dans F le* **noyau** *de f, noté $Ker(f)$, est le sous espace vectoriel de E constitué des éléments de E qui ont pour image* 0.

Le noyau de f, $(Ker(f))$, et l'image de f, $(Im(f))$, sont deux objets très importants pour l'étude d'un homomorphisme f. Compte tenu de l'exercice 2, on peut énoncer le résultat

Théorème 3.1.1 *Un homomorphisme f est injectif si et seulement si son noyau est $\{0\}$. Dans ce cas f est un isomorphisme de E sur son image notée $Im(f)$ ou encore $f(E)$.*

3.2 Premières propriétés des applications linéaires

Dans la suite K désigne un corps commutatif.

Ex-5 Citer des applications linéaires et des applications non linéaires.

Ex-6 Montrer que dans l'espace vectoriel des vecteurs de la géométrie dans l'espace, la projection sur un plan parallèlement à une droite et la projection sur une droite parallèlement à un plan sont des applications linéaires dont on determinera le noyau et l'image.
Soient $0 < n \leq m$ deux entiers. Soit f l'application de K^m dans K^n qui à $(x_1, \cdots, x_m)$ fait correspondre $(x_1, \cdots, x_n)$. Montrer que f est un homomorphisme (application linéaire) dont on déterminera le noyau et l'image.

Ex-7 Soit $C^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et ayant une dérivée continue (fonctions de classe C^1) et $C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que la dérivation D est un homomorphisme de $C^1(\mathbb{R})$ dans $C(\mathbb{R})$. Quels sont son noyau et son image ?

Ex-8 Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans K. Soit T l'application de $K[X]$ dans lui même qui à un polynôme $P(X)$ fait correspondre le polynôme $P(X+1)$. Montrer que T est un endomorphisme. Quels sont le noyau de T et son image ?

Ex-9 Soit $K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans K et de degé $\leq n$. Soit D l'application de $K_n[X]$ dans lui même qui à un polynôme associe son polynôme dérivé. Montrer que D est un endomorphisme. Quels sont son noyau et son image ?

Ex-10 Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans K. Soit $\mathcal{F}(K)$ l'espace des fonctions de K dans lui même. Montrer que l'application ϕ qui à un polynôme $P(X)$ fait correspondre la fonction polynômiale $x \mapsto P(x)$ est un homomorphisme. On suppose le corps K infini, quel est le noyau de ϕ ?
Supposons maintenant que K soit le corps à deux éléments, quel est le noyau de ϕ ?

Ex-11 Soit $K[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans K et soit $D(X)$ un polynôme non nul. On considère l'application de $K[X]$ dans lui même qui à tout polynôme $P(X)$ associe le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $D(X)$. Montrer que cette application est un endomorphisme. Quels sont son noyau et son image ?

Ex-12 Soit $K_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable à coefficients dans K et de degé $\leq n$. On fixe un point $a \in K$ et on considère l'application de $K_n[X]$ dans K qui à tout polynôme $P(X)$ associe sa valeur $P(a)$. Montrer que cette application est un homomorphisme. Quels sont son noyau et son image ?

Ex-13 Soit $C(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Fixons deux points a et b dans $\mathbb{R}$. Soit I l'application de $C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Montrer que cette application est un homomorphisme. Quelle est son image ?

Ex-14 Fixons a dans $\mathbb{R}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à x associe (x, ax). Montrer que f est une application linéaire. Quels sont son noyau et son image ?

Ex-15 Fixons a, b, c, d dans $\mathbb{R}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout (x, y) associe $(ax + by, cx + dy)$. Montrer que f est un endomorphisme. Quels sont son noyau et son image ?

Le cas où f est une application linéaire de E dans le corps de base K est particulier. On dit que f est une **forme linéaire**. Ce cas, par son importance, motive une étude spécifique ultérieure.

3.3 Structure de l'ensemble des applications linéaires

Ex-16 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. Notons $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des homomorphismes de E dans F. Si f et g sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et si λ est un élément de K, on définit $f + g$, λf comme on le fait habituellement pour les fonctions, c'est-à-dire par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Montrer que muni de ces opérations, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur K.

Ex-17 Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps K. Si f est une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G, montrer que $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Ex-18 On considère maintenant l'espace $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes (des opérateurs) de E. En plus de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans un exercice précédent, on considère aussi l'opération de composition des applications $f \circ g$. Montrer que ces opérations confèrent à $\mathcal{L}(E)$ une structure d'algèbre (non commutative).
Montrer que si f et g éléments de $\mathcal{L}(E)$ vérifient $f \circ g = I$ (I est l'application identité), alors f et g ont des inverses.

Chapitre 4

Combinaisons linéaires

Introduction

Comme dans le cas du plan géométrique ou de l'espace, il est important de savoir dans quelles conditions on peut décomposer un vecteur sur d'autres vecteurs et dans quels cas cette décomposition est unique. Ces questions conduisent aux notions de familles libres, de familles génératrices et enfin à la notion de base. En examinant les exemples donnés, le lecteur pourra faire un inventaire (non exhaustif) des méthodes utilisées pour montrer que des familles sont libres, que des familles sont génératrices, que des familles sont des bases.

4.1 Partie engendrée par une famille de vecteurs

On rappelle qu'une famille non vide d'éléments d'un ensemble A est une application ϕ d'un ensemble non vide I (appelé ensemble des indices) dans A. La famille est alors notée $(x_i)_{i\in I}$ où $x_i = \phi(i)$ $(\in A)$.

Définition 4.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soit $S = (x_i)_{i\in I}$ une* **famille non vide de** *E. On appelle* **combinaison linéaire** *d'éléments de S toute somme de la forme*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

où seuls **un nombre fini de coefficients λ_i sont non nuls**.

Ex-1 Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S est un sous espace vectoriel de E, et que ce sous espace est le sous espace engendré par S. On notera $[S]$ ce sous espace.

Définition 4.1.2 *La famille S d'éléments de E est dite* **génératrice** *si $[S] = E$. (Autrement dit tout élément de E s'exprime comme combinaison linéaire des éléments de S).*

Définition 4.1.3 *La famille S d'éléments de E est dite* **libre** *si tout élément de $[S]$ s'écrit de manière* **unique** *comme combinaison linéaire des éléments de S (Les éléments de S sont alors dits* **linéairement indépendants***). Si la famille S n'est pas libre, on dit qu'elle est* **liée** *(les éléments de S sont alors* **linéairement dépendants***).*

Remarque : attention, on travaille ici sur des familles, et non simplement sur des parties. Par exemple (x_1, x_1, x_2) est une famille de trois éléments ; si $x_1 \neq x_2$, la partie qui lui est associée est $\{x_1, x_2\}$.

Ex-2 Montrer que S est une famille libre si et seulement si on a l'implication suivante

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Ex-3 Montrer que la famille S est liée, si et seulement s'il existe un vecteur de S qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de S.
Montrer que si la famille S contient 0, alors elle est liée.
La réciproque est elle vraie ?
Montrer que si la famille S contient deux vecteurs identiques, alors elle est liée.

Ex-4 Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes

1) S est une famille **libre maximale** au sens de l'inclusion dans l'ensemble des parties libres de E.

2) S est une famille **génératrice minimale** au sens de l'inclusion dans l'ensemble des parties génératrices de E.

3) S est une famille à la fois **libre et génératrice**.

Que se passe-t-il dans le cas particulier très simple d'un espace vectoriel réduit à $\{0\}$?

Définition 4.1.4 *Une famille libre et génératrice de E est appelée une* **base** *de E.*

4.2 Exemples de familles de vecteurs

Ex-5 Donner des exemples de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace de familles libres et non génératrices, de familles génératrices et non libres, de familles libres et génératrices.

Ex-6 Soit A un ensemble non vide, E un espace vectoriel. On note $\mathcal{F}(A, E)$ l'espace des fonctions de A dans E. Soit S la partie de $\mathcal{F}(A, E)$ constituée des fonctions constantes et des fonctions qui s'annulent en un point fixé $x_0 \in A$. Déterminer $[S]$.

Ex-7 Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On considére le sous ensemble S de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ défini par

$$S = \{x \mapsto x - u + |x - u|; u \in [a, b]\}.$$

Déterminer $[S]$.
Déterminer $[S \cup \{1\}]$.

Ex-8 Soit $(\lambda_i)_{i \geq 1}$ une suite de nombres réels dont les termes sont tous distincts. Montrer que la famille de fonctions

$$(e^{\lambda_i x})_{i \geq 1}$$

est libre.

Chapitre 5

Bases - Dimension

Introduction

La notion de base est centrale pour l'étude des espaces vectoriels de dimension finie. Tout espace vectoriel admet une base, mais en dimension infinie, dans la plupart des cas il est impossible d'en construire une explicitement. Comme nous le verrons dans la suite, on est souvent amené à considérer plusieurs bases sur un même espace, et regarder alors quels sont les liens entre les composantes des vecteurs dans les diverses décompositions.

5.1 Bases d'un espace vectoriel

Définition 5.1.1 *Une* **base** *d'un espace vectoriel E est une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E qui est à la fois* **libre** *et* **génératrice**.

Définition 5.1.2 *Un espace E est dit de* **dimension finie** *s'il possède une famille génératrice finie.*

Ex-1 Montrer que tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ admet une base ayant un nombre fini d'éléments. (En fait tout espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ admet une base, mais la démonstration quand on n'est pas en dimension finie n'est pas du niveau de ce cours).

Le résultat qui suit (**théorème de l'échange**), est fondamental dans l'étude des bases des espaces vectoriels.

Ex-2 Soit E un espace vectoriel, F une famille libre de E et G une famille génératrice de E. Montrer que si $[F] \neq E$ alors il existe $x \in G$ tel que $F \cup \{x\}$ soit une famille libre, et que dans ces conditions $[F] \subsetneq [F \cup \{x\}]$.

Ex-3 (**Théorème de la base incomplète**). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F une famille libre de E et G une famille génératrice de E. Montrer qu'on peut compléter la famille F en une base de E en lui adjoignant des vecteurs de G.

Ex-4 Montrer que dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Définition 5.1.3 *Si E est un espace de dimension finie nous appellerons* **dimension** *de E et noterons $dim(E)$ le nombre d'éléments d'une base de E (toutes les bases ont le même nombre d'éléments) si $E \neq \{0\}$, et 0 si $E = \{0\}$.*

Remarque : en dimension finie n, on indexe en général les éléments d'une base par $\{1, 2, \cdots, n\}$ (ou par $\{0, 1, \cdots, n-1\}$).

Ex-5 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E si et seulement si $e_1 \neq 0$ et pour tout $2 \leq i \leq n$ $e_i \notin [e_1, \cdots, e_{i-1}]$.

Définition 5.1.4 *Soit E un espace vectoriel, $(s_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E telle que le sous espace $S = [s_i]_{i \in I}$ engendré par les vecteurs s_i soit de dimension finie. On appelle* **rang de la famille** $(s_i)_{i \in I}$*, la dimension de S.*

Remarques :

1) **Sur les méthodes utilisées en dimension finie.** En dimension finie, si on connaît la dimension n de l'espace, pour montrer qu'une famille de n éléments est une base, il suffit de montrer qu'elle est soit libre, soit génératrice. Remarquons qu'un espace de dimension n sur un corps fini à q éléments a q^n éléments ; cette remarque permet de trouver la dimension n de l'espace si on connaît son cardinal.

2) **Suites et fonctions.** Une fonction f d'un ensemble fini à n éléments dans un corps K, outre sa représentation fonctionnelle, peut être définie aussi par ses valeurs, c'est-à-dire par un n-uple $(a_1, \cdots, a_n)$. Ce n-uple peut être aussi considéré comme la suite des coefficients d'un polynôme $a_1 + a_2X +$

$\cdots + a_n X^{n-1}$. Ces trois représentations d'un même objet peuvent être utiles. De plus se donner une base d'un espace de dimension n, revient à représenter tout élément de cet espace par ses composantes, c'est-à-dire par un n-uple, ce qui donne aux trois représentations précédentes une grande importance.

3) **Droites et hyperplans.** Dans un espace vectoriel E de dimension n, un sous espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle** (ou plus brièvement **droite**), un sous espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé **hyperplan vectoriel** (ou plus brièvement **hyperplan**).

5.2 Exemples de bases

Ex-6 Montrer que dans K^n, la famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ où

$$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$$

(le 1 étant la i^e composante) est une base.

Ex-7 Montrer que la famille $(1, X, X^2, \cdots)$ est une base de $K[X]$ et que la famille $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de l'espace $K_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$.

Ex-8 Soit $\mathcal{F}(A, K)$ l'espace des fonctions définies sur un ensemble fini A à valeurs dans le corps K. Pour tout $a \in A$, notons e_a la fonction définie par $e_a(a) = 1$ et $e_a(x) = 0$ si $x \neq a$. Montrer que la famille $(e_a)_{a\in A}$ est une base. Quelles sont les composantes d'une fonction f sur cette base ?

Ex-9 Dans l'espace $K_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ on considère pour tout $0 \leq i \leq n$ un polynôme $P_i(X)$ de degré exactement i. Montrer que la famille $(P_i(X))_{1\leq i\leq n}$ est une base de $K_n[X]$.

Ex-10 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. Pour tout $1 \leq j \leq n$ on pose

$$f_j = \sum_{1\leq i\leq j} a_{i,j} e_i$$

avec $a_{j,j} \neq 0$. Montrer que la famille $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de E.

Ex-11 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Quel est le nombre d'éléments de E ? Quel est le nombre de familles libres de E ayant k éléments ? Quel est le nombre de bases de E ?

Combien y a-t-il de sous espaces de dimension k dans E ? Quel est le nombre de directions de droites dans E ?

Ex-12 Soit $B_n = \mathcal{F}(\{0,1\}^n, \{0,1\})$ l'espace (sur le corps à deux éléments) des fonctions booléennes de n variables booléennes. Quel est le nombre d'éléments de B_n ? En déduire la dimension de B_n. Pour tout $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \{0,1\}^n$ on définit la fonction

$$e_a(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \leq i \leq n} (1 + x_i + a_i).$$

Montrer que la famille $(e_a)_{a \in \{0,1\}^n}$ est une base de B_n (Comparer avec l'exercice 8).
Quelles sont les composantes d'une fonction f sur cette base ?
Montrer que toutes les fonctions de B_n sont des fonctions polynomiales en n variables de degré total au plus n et de degré partiel par rapport à chaque variable au plus 1.
Trouver une base de B_n constituée de fonctions monomiales.
Traiter en détail l'exemple $n = 3$.

Ex-13 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Construire une base de l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F. Quel est la dimension de cet espace ?

Chapitre 6

Somme directe de sous espaces

Introduction

La notion de somme de sous espaces, permet une décomposition plus grossière des vecteurs que la notion de base. On obtient par exemple des décompositions du type : toute fonction réelle est de manière unique somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

6.1 Décomposition d'espaces vectoriels

Définition 6.1.1 *Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels d'un espace E. La* **somme** *de ces deux sous espaces, notée $E_1 + E_2$, est l'ensemble des $x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.*

Ex-1 Montrer que la somme $E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E.

Ex-2 Soit $F = E_1 + E_2$. Montrer que pour que tout élément de F s'écrive de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, il faut et il suffit que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Définition 6.1.2 *Si E_1 et E_2 vérifient $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, on dit que la somme $E_1 + E_2$ est une* **somme directe** *et on la note $E_1 \oplus E_2$.*

Ex-3 Soient E_1 et E_2 deux sous espaces de dimension finie d'un espace E tels que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de E_1 et $(v_1, \cdots, v_q)$ une base de E_2. Montrer que $(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q)$ est une base de $E_1 \oplus E_2$.

On en conclut que $dim(E_1 \oplus E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$.

Ex-4 Soit E un espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Considérons une partition $I = J \cup K$ de I. Montrer que si on pose $E_1 = [e_i]_{i\in J}$ et $E_2 = [e_i]_{i\in K}$, alors $E = E_1 \oplus E_2$.

Ex-5 Soit E un espace de dimension finie et E_1 un sous espace de E. Montrer qu'il existe un sous espace E_2 de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$. Ce sous espace E_2 est-il unique ?

Ex-6 Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces de dimension finie de E, montrer que $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.

Définition 6.1.3 *Soit E un espace de dimension finie et E_1 un sous espace de E. Un sous espace E_2 de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$ est appelé un* **supplémentaire** *de E_1 dans E.*

Ex-7 Montrer que tous les supplémentaires de E_1 ont la même dimension.

Définition 6.1.4 *En dimension finie, la dimension d'un supplémentaire de E_1 est appelée la* **codimension** *de E_1. et notée $codim(E_1)$.*

Ex-8 Soit E un espace de dimension finie dont on fixe une base $(e_1, \cdots, e_n)$. Soit C un sous espace vectoriel de dimension k de E. Montrer qu'il existe une sous famille de $n-k$ vecteurs $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-k}})$ de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que

$$E = C \oplus [e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-k}}].$$

Pour tout $j \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_{n-k}\}$ on décompose e_j en la somme d'un vecteur $c_j \in C$ et d'un vecteur $f_j \in [e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-k}}]$

$$e_j = c_j + f_j.$$

Montrer que la famille (c_j) ainsi obtenue est une base de C.
Comment sont les composantes des vecteurs e_j où $j \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_{n-k}\}$ dans la base $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ où $g_i = e_i$ si $i \in \{i_1, \cdots, i_{n-k}\}$ et $g_i = c_i$ sinon ?

Définition 6.1.5 *Soit E un espace vectoriel, décomposé en somme directe de deux de ses sous espaces E_1 et E_2*

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

La **projection** *p sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application qui à tout x de E fait correspondre sa composante x_1 sur E_1 dans la décomposition $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.*

Ex-9 Montrer que la projection p ainsi définie est une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. Quel est le noyau de p ? Quelle est l'image de p ?

Ex-10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. Montrer que f est une projection.

6.2 Exemples de décompositions

Ex-11 Donner des exemples et des contre exemples dans le plan et dans l'espace (faire des dessins).

Ex-12 Montrer que $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus [i]$.

Ex-13 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps. On considère les deux sous espaces E_1 et F_1 de $E \times F$ définis par $E_1 = E \times \{0\}$ et $F_1 = \{0\} \times F$. Montrer que $E \times F = E_1 \oplus F_1$.

Ex-14 Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}$ le sous espace constitué des fonctions paires et $\mathcal{I}$ le sous espace constitué des fonctions impaires.
Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Ex-15 Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}_a$ le sous espace des fonctions nulles au point a, et $\mathcal{C}$ le sous espace des fonctions constantes.
Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{C}$.

Ex-16 Soit $K[X]$ l'espace des polynômes à une variable et à coefficients dans le corps K. Fixons $N(X) \in K[X]$ et notons n (supposé ≥ 1) le degré de $N(X)$. Soit E le sous espace de $K[X]$ constitué des multiples $A(X)N(X)$ de $N(X)$. Montrer que

$$K[X] = K_{n-1}[X] \oplus E,$$

où $K_{n-1}[X]$ est le sous espace constitué des polynômes de degré $\leq n-1$.

Ex-17 Soit E un espace vectoriel de dimension n, H un hyperplan vectoriel de E, D une droite vectorielle qui n'est pas contenue dans H. Montrer que $E = H \oplus D$.

6.3 Somme de plusieurs sous espaces

Nous étendons maintenant la notion de somme directe à un nombre fini quelconque de sous espaces.

Ex-18 Montrer que la somme de deux sous espaces vectoriels est associative. Ceci nous permet donc d'envisager de généraliser la notion de somme à un nombre fini de sous espaces.

Définition 6.3.1 *Soit $(Ei)_{1\leq i\leq s}$ une famille finie de s sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. La somme de ces s sous espaces notée $E_1 + \cdots + E_s$ est l'ensemble des $x_1 + \cdots + x_s$ où $x_i \in E_i$.*

Ex-19 Montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_s$ est un sous espace vectoriel de E.

Ex-20 Montrer que pour que tout élément de $E_1 \cdots + E_s$ s'écrive de manière unique sous la forme $x_1 + \cdots + x_s$ où $x_i \in E_i$, il faut et il suffit que pour chaque $1 \leq i \leq s$ on ait

$$E_i \cap (E_1 + \cdots + E_{i-1} + E_{i+1} + cdots + E_s) = \{0\}.$$

Définition 6.3.2 *Si la famille $(Ei)_{1\leq i\leq s}$ vérifie pour chaque $1 \leq i \leq s$*

$$E_i \cap (E_1 + \cdots + E_{i-1} + E_{i+1} + \cdots + E_s) = \{0\},$$

on dit que la somme $E1 + \cdots + E_s$ est directe. On la note

$$\bigoplus_{1i\leq s} E_i.$$

Ex-21 Soit

$$E_1 \subsetneq E_2 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n$$

une suite de sous espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe une suite $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ de sous espaces vectoriels de E telle que pour tout $1 \leq j \leq n$

$$E_j = \bigoplus_{1\leq i\leq j} F_i.$$

Ex-22 Généraliser les notions de somme et de somme directe à une infinité de sous espaces.

Chapitre 7

Projections

Introduction

La notion de projection est une notion très importante liée à la décomposition en somme directe. On peut intuitivement se faire une idée de ce que représente une projection en se plaçant en géométrie à 3 dimensions sur $\mathbb{R}$ et en pensant par exemple à la projection sur un plan parallèlement à une droite.

7.1 Projection et somme directe

Définition 7.1.1 *Soit E un espace vectoriel, décomposé en somme directe de deux de ses sous espaces E_1 et E_2*

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

La **projection** *p sur E_1 parallèlement à E_2 est l'application de E dans E qui à tout x de E fait correspondre sa composante x_1 sur E_1 dans la décomposition $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.*

Ex-1 Montrer que la projection p ainsi définie est une application linéaire vérifiant $p^2 = p$. Quel est le noyau de p ? Quelle est l'image de p.

Ex-2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$. Montrer que f est une projection.

Ex-3 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $E_1 \subset E_2$ deux sous espaces de E. Soit F_2 un supplémentaire de E_2 dans E et F_1 un supplémentaire de E_1 dans E_2. Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe.
Soit p_2 la projection de E sur E_2 parallèlement à F_2 et p_1 la projection de E_2 sur E_1 parallèlement à F_1. Montrer que $p = p_1 \circ p_2$ est la projection de E sur E_1 parallèlement à $F_1 \oplus F_2$.

Ex-4 Montrer que si deux projections p_1 et p_2 commutent alors $p_1 \circ p_2$ est une projection.
Montrer que

$$Im(p_1 \circ p_2) = Im(p_1) \cap Im(p_2)$$

et que

$$Ker(p_1 \circ p_2) = Ker(p_1) + Ker(p_2).$$

Construire des exemples de projections qui commutent.

Chapitre 8

Formes linéaires

Introduction

Les formes linéaires sont des applications linéaires particulières : l'espace d'arrivée est de dimension 1, c'est le corps de base K. Ceci motive une étude spécifique. En effet, il est clair par exemple que l'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ se ramène à l'étude de m fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (quand on veut étudier un signal où il y a n entrées et m sorties, on peut étudier chaque sortie en fonction des n entrées) ; en particulier on peut considérer que l'étude d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ peut passer par l'étude de m formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Cette façon de voir, même si elle ne constitue pas le seul angle d'attaque, motive une étude particulière du cas des formes linéaires. De plus, du fait que $m = 1$, les résultats s'expriment souvent de manière plus agréable et plus instructive.

8.1 Formes linéaires - Espace dual

Définition 8.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Une* **forme linéaire** *sur E est une application linéaire de E dans K.*

Ex-1 Montrer que si f est une forme linéaire non nulle alors $Im(f) = K$ (en particulier la dimension de l'image de f est 1).

Définition 8.1.2 *Le* **dual** *de E, que nous noterons E^*, est l'ensemble des formes linéaires sur E.*

Ex-2 Montrer que E^*, muni de l'addition des formes linéaires et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel sur K.

Ex-3 Soit f une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que le noyau de f est un hyperplan de E.

Ex-4 Réciproquement, montrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire.

Ex-5 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. On considère dans E^* la famille $(e_j^*)_{1\leq j\leq n}$ définie par $e_j^*(ei) = \delta_{i,j}$ (on rappelle que la notation de Kronecker $\delta_{i,j}$ désigne 1 si $i = j$ et 0 sinon). Que peut on dire de la dimension de E^*. Montrer que la famille $(e_j^*)_{1\leq j\leq n}$ est une base de E^*. La dimension de E^* est donc n.

Définition 8.1.3 *La base* $(e_j^*)_{1\leq j\leq n}$ *de* E^* *est appelée la* **base duale** *de la base* $(e_i)_{1\leq j\leq n}$.

Définition 8.1.4 *Le* **bidual** E^{**} *de* E *est le dual de* E^*.

Ex-6 On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie. Soit q l'application de E dans E^{**} définie par

$$q(x)(f) = f(x),$$

(où $x \in E$ et $f \in E^*$).
Montrer que q est un isomorphisme de E sur E^{**}. (Attention, ici le fait que E soit de dimension finie est primordial. En dimension infinie, $q(E)$ n'est pas égal à E^{**}).

Ex-7 Montrer que si $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base de E^*, il existe une **unique base** $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ dont $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ est la base duale. Ainsi on peut parler de couples de bases duales.

Ex-8 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Supposons qu'il existe une famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et une famille $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ de E^* telles que $f_j(e_i) = \delta_{i,j}$. Montrer qu'alors $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E et que donc $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ est sa base duale.

8.2 Exemples de formes linéaires - Applications

Ex-9 Montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, l'application p_i de R^n dans R qui à tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$ associe x_i est une forme linéaire sur E. Montrer que la famille $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de R^{n*}. De quelle base la base $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est elle la base duale ?

Ex-10 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels.

a) Montrer que si $a \in \mathbb{R}$, l'application δ_a qui à tout polynôme P fait correspondre sa valeur $P(a)$ au point a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que l'application I qui à tout polynôme P fait correspondre son intégrale sur le segment $[-1, 1]$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Montrer que l'application qui à tout polynôme P fait correspondre la valeur de sa dérivée au point a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Ex-11 (formule des trois niveaux)

a) Notons $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 2 sur $\mathbb{R}$. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.

Notons δ_a la forme linéaire qui à tout polynôme P de degré ≤ 2 fait correspondre sa valeur $P(a)$ au point a. Soit γ un réel distinct de -1 et de 1. On considère les 3 formes linéaires $\delta_1, \delta_{-1}, \delta_\gamma$. Montrer qu'il existe 3 polynômes P_1, P_{-1}, P_γ qu'on calculera, vérifiant $\delta_i(P_j) = \delta_{i,j}$ (0 si $i \neq j$, 1 sinon) pour tout i et tout j dans $\{1, -1, \gamma\}$.

En conclure que $(\delta_1, \delta_{-1}, \delta_\gamma)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]^*$ et que (P_1, P_{-1}, P_γ) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Notons I la forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$I(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt.$$

Montrer qu'il existe 3 constantes λ, μ, ν telles que

$$I = \lambda\delta_1 + \mu\delta_{-1} + \nu\delta_\gamma$$

et donc que pour tout polynôme P de degré ≤ 2 on a

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda P(1) + \mu P(-1) + \nu P(\gamma).$$

b) On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3 sur $\mathbb{R}$ et comme dans le a) on considère les 3 formes linéaires $\Delta_1, \Delta_{-1}, \Delta_\gamma$ où Δ_a est la forme linéaire qui à tout polynôme P de degré ≤ 3 fait correspondre sa valeur $P(a)$ au point a. On note J la forme sur $\mathbb{R}_3[X]$ définie par

$$J(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt.$$

Montrer que si on pose $P_4(X) = (X-1)(X+1)(X-\gamma)$, la famille $(P_1, P_{-1}, P_\gamma, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
Calculer $\Delta_a(P_4)$ pour $a \in \{1, -1, \gamma\}$.
Montrer qu'il existe une valeur et une seule γ_0 de γ telle que $J(P_4) = 0$. On calculera explicitement cette valeur.
Montrer que pour $\gamma = \gamma_0$, J est dans le sous espace engendré par $\Delta_1, \Delta_{-1}, \Delta_{\gamma_0}$.
En conclure qu'il existe des constantes λ_0, μ_0, ν_0 qu'on calculera explicitement, telles que pour tout polynôme P de degré ≤ 3 on ait

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda_0 P(1) + \mu_0 P(-1) + \nu_0 P(\gamma_0).$$

Ex-12 On se place dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3 sur $\mathbb{R}$. On considère les 4 formes linéaires $\phi_{i,j}$ où i et j sont dans $\{0, 1\}$, définies par

$$\phi_{i,j}(P) = D^i P(-1^j).$$

où D est l'opérateur de dérivation.
Montrer qu'il existe 4 polynômes $P_{i,j}$ qu'on determinera tels que

$$\phi_{i,j}(P_{k,l}) = \delta_{i,k}\delta_{j,l}.$$

Ainsi les $(P_{i,j})$ et les $(\phi_{i,j})$ forment un couple de bases duales.

Ex-13 On se place dans l'espace $\mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré ≤ 1 sur $\mathbb{R}$. Soient α et β tels que $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. On note δ_α et δ_β les formes linéaires sur $\mathbb{R}_1[X]$ où comme dans les exercices précédents, $\delta_u(P) = P(u)$. Montrer qu'il existe deux polynômes $P_\alpha(X)$ et $P_\beta(X)$, qu'on calculera explicitement tels que $\delta_u(P_v) = \delta_{u,v}$ $(u, v \in \{\alpha, \beta\}$).
En conclure que si α et β sont fixés, il existe des constantes λ et μ telles que

$$I = \lambda\delta_\alpha + \mu\delta_\beta$$

où I désigne la forme linéaire sur $\mathbb{R}_1[X]$ définie par

$$I(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt,$$

ce qui veut dire que pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$

$$I(P) = \lambda P(\alpha) + \mu P(\beta).$$

S'inspirer des exercices précédents pour montrer qu'il existe un choix et un seul des points α et β pour lequel cette dernière formule est vraie pour tout polynôme de degré ≤ 3. Déterminer ces points α et β ainsi que les constantes λ et μ qui découlent de ce choix.

Ex-14 (polynômes de Lagrange) Sur $\mathbb{R}$ on considère des points

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

On note δ_u la forme linéaire sur l'espace $R_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ définie par $\delta_u(P) = P(u)$. Considérons les polynômes

$$L_k(X) = \frac{(X - x_0)...(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})...(X - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}.$$

Montrer que pour $i, j \in \{0, \cdots, n\}$

$$\delta_{x_i}(L_j) = \delta_{i,j}.$$

En conclure que les polynômes $L_k(X)$ forment une base de $R_n[X]$, ayant $(\delta_{x_j})_j$ pour base duale.
Soit $P(X) \in R_n[X]$. Alors $P(X)$ se décompose dans la base des $L_k(X)$ sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(X).$$

Calculer les coefficients a_k de cette décomposition.
En conclure qu'il existe un polynôme de degré $\leq n$ et un seul qui prend aux $n + 1$ points x_i des valeurs fixées y_i.
Quel est ce polynôme ? (On l'appelle **polynôme d'interpolation de Lagrange** vérifiant les conditions données).

Ex-15 Soit E un espace de dimension n sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Quel est le nombre d'hyperplans vectoriels distincts ? Quel est le nombre d'hyperplans vectoriels distincts contenant un sous espace fixé de dimension $k < n$?

8.3 Compléments sur la dualité

Ex-16 Soient E et F deux espaces vecoriels de dimension finie et T une application linéaire de E dans F. On définit l'application T^* du dual F^* de F dans le dual E^* de E par

$$T^*(f)(x) = f(T(x)).$$

Montrer que $T*$ est une application linéaire de F^* dans E^*. (C'est la **transposée** de f).

Ex-17 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et T une application linéaire de E dans F, q l'application de E dans E^{**} définie par $q(x)(f) = f(x)$, q_1 l'application de F dans F^{**} définie de la même façon. Montrer que $T^{**}(q(x)) = q_1(T(x))$.

Ex-18 Soit F un espace vectoriel de dimension finie n et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base de F. Soit C un sous espace de dimension k de F. Notons ϕ l'application de $F \times F$ dans le corps de base définie par

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$. Notons T l'application de F dans F^* qui à tout $y \in F$ associe $T(y) = \phi_y$ de telle sorte que $\phi_y(x) = \phi(x, y)$.

a) Montrer que T est un isomorphisme de F sur F^*. En particulier pour tout $g \in F^*$ il existe un unique $y \in F$ tel que pour tout $x \in F$, $g(x) = \phi(x, y)$.

b) Définissons maintenant

$$C^\perp = \{y \in F; \phi_y(x) = 0 \quad \forall x \in C\}.$$

Montrer que $C \subset C^{\perp\perp}$.
Montrer que si $C_1 \subset C_2$ alors $C_2^\perp \subset C_1^\perp$.
Montrer que $C^\perp = C^{\perp\perp\perp}$.
Montrer enfin que $C = C^{\perp\perp}$.

Chapitre 9

Matrices et applications linéaires

Introduction

Nous nous plaçons dans cette partie dans des espaces vectoriels de dimension finie. Nous allons voir qu'une application linéaire peut être lorsque des bases sont choisies dans l'espace de départ et celui d'arrivée représentée par un tableau de coefficients qu'on appelle une matrice. En conséquence on peut opérer sur ces tableaux de nombres en pensant aux opérations correspondantes sur les applications linéaires et réciproquement. Nous exposerons cette notion en nous référant en permanence à cette double interprétation.

9.1 Applications linéaires entre espaces vectoriels munis de bases

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives m et n sur un même corps K. Soient $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ une base de E et $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F. Soit enfin f une application linéaire de E dans F. Tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$$

et donc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j f(e_j).$$

Par conséquent l'application f est connue dès que les images $f(e_j)$ sont connues. Réciproquement si on fixe les $f(e_j)$ la formule précédente définit bien une application linéaire. Se donner une application linéaire est donc équivalent à se donner les images des vecteurs de la base choisie. Il est commode de stocker dans un tableau rectangulaire appelé **matrice** les composantes des vecteurs $f(e_j)$ dans la base $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$. Plus précisément on met à la colonne j et à la ligne i la composante $a_{i,j}$ du vecteur $f(e_j)$ sur le vecteur de base f_i. Ainsi la colonne j du tableau contient bien le vecteur (sous forme de composantes) $f(e_j)$.

Définition 9.1.1 *La matrice*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

ou encore

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ . & . & \cdots & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

est la matrice de l'application linéaire f dans les bases données. Cette matrice a n ligne et m colonnes; on dira que sa **taille** *est (n, m).*

Remarquons bien que si on utilise d'autres bases pour les espaces E et F on change aussi la matrice de l'application linéaire f.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, l'identité de E dans E, lorsque on choisit la même base dans E espace de départ et dans E espace d'arrivée a pour matrice

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

appelée **matrice unité**.

9.2 Exemples de matrices d'applications linéaires

Ex-1 Soit E le plan vectoriel muni d'une base orthonormée. On considére dans E la rotation vectorielle d'angle θ (E est ici à la fois espace d'arrivée et espace de départ avec la même base). Quelle est sa matrice ?

Ex-2 On muni $\mathbb{R}^3$ de la base habituelle $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base $f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)$. Soit ϕ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2)$ (où a et b sont des constantes réelles). Quelle est la matrice de ϕ ?

Ex-3 Soit $K_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans K. On munit cet espace de la base $(1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \cdots, \frac{x^n}{n!})$. Soit D l'opérateur de dérivation de $K_n[X]$ dans lui-même. Quelle est la matrice de D ?

Ex-4 Reprenons les hypothèses et les notations de l'exercice précédent. Soit T_h l'opérateur de translation sur $K_n[X]$ défini par $T_h(P)(X) = P(X+h)$.
Exprimer T_h en fonction de h et de D (penser à la **formule de Taylor** pour les polynômes).
Quelle est la matrice de T_h ?

Ex-5 On considère le plan de la géométrie euclidienne, muni d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2). Soit t l'application linéaire de ce plan dans lui même de matrice (pour la base fixée)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

(où $h > 0$).
Quelle est l'image $\overrightarrow{ON}$ par t du vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonées (x, y) ?
Donner une construction géométrique de cette image.
Soit $M_0 = (1,0)$. On construit successivement les points M_n tels que $\overrightarrow{OM_n} = t(\overrightarrow{OM_{n-1}})$. Montrer que les points M_n sont sur une spirale logarithmique.

Ex-6 Soit E l'espace vectoriel sur le corps $\{0,1\}$ des applications affines de $\{0,1\}^3$ dans $\{0,1\}$ c'est-à-dire les applications de la forme $(x_1, x_2, x_3) \to u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ dont on prend pour base les 4 applications

$$(x_1, x_2, x_3) \to 1,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to x_1,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to x_2,$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to x_3.$$

Soit F l'espace vectoriel des fonctions de $\{0,1\}^3$ dans $\{0,1\}$ muni de la base $(e_i)_{0\leq i\leq 7}$ où $e_i(x_1,x_2,x_3) = 1$ si $i = x_1 + 2x_2 + 4x_3$ (autrement dit si i a x_1, x_2, x_3 pour développement binaire) et $e_i(x_1,x_2,x_3) = 0$ sinon.
Soit I l'application qui à $f \in E$ fait correspondre $f \in F$. Quelle est la matrice de I dans les bases considérées ?

Ex-7 Soit $K_3[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients dans le corps K et x_0, x_1, x_2, x_3 des points distincts de K. Soit T l'application de $K_3[X]$ dans K^4 définie par

$$T(P) = (P(x_0), P(x_1), P(x_2), P(x_3)).$$

Quelle est la matrice de T lorsque $K_3[X]$ est muni de la base des monômes et K^4 de sa base habituelle $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$? (les matrices de cette forme ou leurs transposées sont dites **matrices de Vandermonde**).
Quelle est la matrice de T lorsque $K_3[X]$ est muni de la base des polynômes de Lagrange (L_0, L_1, L_2, L_3) (cf. Formes linéaires, Ex-14) ?

Ex-8 Soit $K_3[X]$ l'espace des polynômes de degré ≤ 3 à coefficients dans le corps K et x_1, x_2 des points distincts de K. Soit T l'application de $K_3[X]$ dans K^4 définie par

$$T(P) = (P(x_1), P'(x_1), P(x_2), P'(x_2)).$$

Quelle est la matrice de T lorsque $K_3[X]$ est muni de la base des monômes et K^4 de sa base naturelle $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$?

Ex-9 Soit $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ un point fixé dans $\mathbb{R}^4$. On considère l'application T_u de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$T_u(f_0, f_1, f_2, f_3) = (g_0, g_1, g_2, g_3),$$

avec

$$g_i = \sum_{k+l=i \ (mod\ 4)} f_k u_l.$$

Quelle est la matrice de T_u lorsque $\mathbb{R}^4$ est muni de sa base naturelle ?
Remarque : Ici on peut considérer les éléments de $\mathbb{R}^4$ comme des fonctions (définies par leurs valeurs) de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$. Alors si $f = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une telle fonction, la fonction $g = T_u(f)$ est la convolée $f * u$. (Les matrices de cette forme sont dites **matrices circulantes**).

Chapitre 10

Opérations élémentaires sur les matrices

Introduction

Il existe de nombreuses opérations intéressantes sur les tableaux matriciels. Nous présentons ici les opérations simples qui découlent des opérations de base sur les applications linéaires : l'addition, la multiplication par un scalaire, la composition, la transposition.

10.1 Opérations sur les matrices

Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps K, munis des bases respectives $e = (e_i)_{1 \leq i \leq m}$, $f = (f_j)_{1 \leq j \leq n}$, $g = (g_k)_{1 \leq k \leq p}$.

Ex-1 Montrer que si a et b sont des applications linéaires de E dans F de matrices respectives $(a_{i,j})_{i,j}$ et $(b_{i,j})_{i,j}$, alors $a+b$ a pour matrice $(a_{i,j}+b_{i,j})_{i,j}$.

Définition 10.1.1 *La somme de deux matrices $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ de même taille est la matrice $C = (c_{i,j})_{i,j}$ de même taille où $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$. On note $C = A + B$.*

Ex-2 Montrer que si a est une application linéaire de E dans F de matrice $(a_{i,j})_{i,j}$ et si $\lambda \in K$, alors λa a pour matrice $(\lambda a_{i,j})_{i,j}$.

Définition 10.1.2 *Le produit d'une matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ par un scalaire λ est la matrice $C = (c_{i,j})_{i,j}$ de même taille où $c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$. On note $C = \lambda A$.*

Définissons le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne

$$(a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

comme étant le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Ex-3 Soit $b \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F de matrice $B = (b_{i,j})$ ayant donc n lignes et m colonnes, et $a \in \mathcal{L}(F, G)$ une application linéaire de F dans G de matrice $A = (a_{i,j})$ ayant donc p lignes et n colonnes. La composée $a \circ b$ est une application linéaire c de E dans G et sa matrice sera notée $C = (c_{i,j})$. Cette matrice a p lignes et m colonnes.
Montrer que le coefficient $c_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B.

Définition 10.1.3 *Le produit de deux matrices $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de taille (p, n) et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ de taille (n, m) est la matrice $C = (c_{i,j})_{i,j}$ de taille (p, m) où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$. On note $C = AB$.*

Ex-4 Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ dont la matrice est $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de taille (n, m). Considérons l'application transposée a^* de F^* dans E^* définie par $a^*(\phi)(x) = \phi(a(x))$. Montrer que la matrice $(a^*_{i,j})_{i,j}$ de a^* quand F^* est muni de la base duale de la base f et E^* muni de la base duale de la base e est de taille (m, n) et vérifie $a^*_{i,j} = a_{j,i}$.

Définition 10.1.4 *La transposée de la matrice $A = (a_{i,j})$ de taille (n, m), est la matrice $A^t = (a_{j,i})$ de taille (m, n).*

Ex-5 Montrer que $(AB)^t = B^t A^t$.

10.2 Structures des espaces de matrices

Compte tenu de l'interprétation des matrices en termes d'applications linéaires, les structures de bases seront les mêmes.
Notons $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices ayant m lignes et n colonnes à coefficients dans K. Avec l'addition des matrices et la multiplication par un scalaire, $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K.

Ex-6 Construire une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Quelle est sa dimension ?

Lorsque $m = n$ on a l'espace $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n. La multiplication des matrice est alors une opération interne de cet ensemble et lui confère une structure d'anneau (non commutatif). L'unité de l'anneau est la matrice unité.

Ex-7 Donner des exemples de matrices carrées de même taille A et B telles que $AB \neq BA$.

Ex-8 Montrer que si A et B sont des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(K)$ alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chapitre 11

Déterminants

Introduction

A une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n, ou encore à une matrice carrée de taille (n, n) (qui peut être considérée aussi comme la famille formée par ses n vecteurs colonnes), on associe un élément du corps de base appelé le determinant du système, qu'on peut concevoir de manière intuitive comme le "volume algébrique" du "parallélépipède" (en dimension n) construit sur les vecteurs de la famille. Ainsi ce déterminant sera 0 si et seulement si la famille de vecteurs est liée.

11.1 Formes multilinéaires alternées - Déterminants

Soit E un espace vectoriel sur le corps K, de dimension finie n, dans lequel **on fixe une base** $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Définition 11.1.1 *Une* **forme n-multilinéaire alternée** f *est une application de E^n dans K qui est linéaire par rapport à chacune des n variables, et qui vérifie en outre pour tout couple $1 \leq i < j \leq n$ et tout $(x_1, \cdots, x_n)$*

$$f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n).$$

Ainsi lorsque f est n-multilinéaire alternée, en utilisant la décomposition de toute permutation en produit de transpositions, on peut écrire pour toute permutation σ de $\{1, \cdots, n\}$

$$f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^{\epsilon(\sigma)} f(x_1, \cdots, x_n)$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

Ex-1 Montrer que l'ensemble des formes n-multilinéaires alternées est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de E^n dans K. Nous noterons $\mathcal{A}_n(E)$ cet espace vectoriel.

Ex-2 Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E, dont les composantes dans la base e fixée sont données par

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} e_j.$$

Soit $\phi \in \mathcal{A}_n(E)$.
Montrer que

$$\phi(x_1, \cdots, x_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}\Big) \phi(e_1, \cdots, e_n),$$

où S_n est le groupe des permutations de $\{1, \cdots, n\}$.

Soit $\lambda \in K$. Montrer que l'application ϕ_λ de E^n dans K définie par

$$\phi_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}$$

est une forme n-multilinéaire alternée.

En conclure que $dim(\mathcal{A}_n(E)) = 1$, et que toute forme multilinéaire alternée est définie par sa valeur prise sur $(e_1, \cdots, e_n)$.

Définition 11.1.2 *On appelle* **déterminant** *dans la base* $e = (e_1, \cdots, e_n)$, *la forme n-multilinéaire alternée qui vaut* 1 *sur* $(e_1, \cdots, e_n)$.
Ainsi

$$det(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} x_{1,\sigma(1)} \cdots x_{n,\sigma(n)}.$$

Le déterminant d'une matrice carrée est le determinant de la famille de ses vecteurs colonnes.

Ex-3 Utiliser la formule précédente pour calculer dans le cas $n = 2$

$$det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ex-4 Montrer que $det(A) = det(A^t)$.

Ex-5 Montrer que $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Ex-6 Donner un exemple dans lequel $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$.

Ex-7 Montrer que si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ est liée, alors $det(x_1, \cdots, x_n) = 0$. En conclure que si A est une matrice carrée, et si B est obtenue à partir de A en ajoutant à une colonne (resp. à une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes) alors $det(A) = det(B)$.

Ex-8 Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre n. Si $1 \leq i, j \leq n$, notons $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de la matrice A la ligne i et la colonne j.
Montrer que

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j}),$$

puis

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} det(A_{i,j}).$$

La première formule donne le développement du déterminant suivant la colonne j, la deuxième formule donne son développement suivant la ligne i.

Ex-9 Soit A une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux seront notés λ_i. Quel est le déterminant de A ? En particulier quel est le déterminant de la matrice unité ?

Ex-10 Montrer que $det(AB) = det(A)det(B)$.
En conclure que si A est inversible $det(A) \neq 0$ et que $det(A^{-1}) = 1/det(A)$.

Ex-11 Montrer que $det(A) \neq 0$ est équivalent à A inversible.

Ex-12 Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base e. Soit $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle A la matrice de taille (n, m) dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs f_j décomposés dans la base e. Montrer que le rang du système de vecteurs $(f_j)_{1 \leq j \leq m}$ est r si et seulement s'il existe une matrice carrée B extraite de A de taille (r, r) de déterminant non nul, et toute matrice carrée de taille $(r+1, r+1)$ extraite de A est de déterminant nul.

11.2 Calcul de déterminants

Les problèmes de calcul de déterminants se classent dans deux catégories distinctes. D'une part le calcul de type formel pour les déterminants qui ont une forme particulière, d'autre part le calcul numérique de déterminants sans forme algébrique particulière. Le cas du calcul formel de déterminants n'est pas un cas d'école. De nombreux problèmes concrets conduisent en effet à s'intéresser à des déterminants ayant une forme particulière, et pour lesquels on arrive à obtenir une formule close.
Le calcul numérique de déterminants "quelconques" se fait dès que l'ordre dépasse trois ou quatre par des méthodes numériques adaptées (par exemple pivot de Gauss).

Ex-13 Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & cos(\phi) & & \cdots & -sin(\phi) & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & sin(\phi) & & \cdots & cos(\phi) & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Ex-14 Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ex-15 Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Ex-16 calculer le déterminant d'ordre n tridiagonal en fonction des paramètres a,b,c

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ & & . & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & & & a & b \\ & & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

On pourra établir une relation de récurrence liant D_n à D_{n-1} et $D_n - 2$.

Ex-17 (Déterminants de Vandermonde) On considère le déterminant

$$V(z_0, z_1, \cdots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

On remarquera que ce déterminant est un polynôme en les $n+1$ variables $z_0, \cdots, z_n$. Quel est le degré de ce polynôme ?
Montrer que ce polynôme a pour tout $i < j$ le monôme $(z_j - z_i)$ en facteur.
Calculer ce déterminant.

Ex-18 Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

où

$$\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Ex-19 Calculer le déterminant circulant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ . & . & \cdots & . \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

(on pourra multiplier à droite ce déterminant par le déterminant de l'exercice précédent).

Ex-20 Calculer le déterminant d'ordre $2n+1$

$$\begin{vmatrix} 1 & cos(x_0) & sin(x_0) & \cdots & cos(nx_0) & sin(nx_0) \\ 1 & cos(x_1) & sin(x_1) & \cdots & cos(nx_1) & sin(nx_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & cos(x_{2n}) & sin(x_{2n}) & \cdots & cos(nx_{2n}) & sin(nx_{2n}) \end{vmatrix}.$$

Ex-21 On veut calculer le déterminant D_n d'ordre n dont le coefficient d'indice (i,j) est $\frac{1}{a_i+b_j}$ (on supposera que $a_i+b_j \neq 0$).
Montrer dans un premier temps que D_n est de la forme

$$D_n = c_n \frac{\prod_{i>j}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}$$

où c_n est une constante.
Montrer que

$$\lim_{a_n\to\infty} a_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

puis que

$$\lim_{b_n\to\infty}\lim_{a_n\to\infty} a_n D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

En conclure que

$$\lim_{b_n\to\infty}\lim_{a_n\to\infty} \frac{a_n D_n}{D_{n-1}} = 1,$$

puis que pour tout n, c_n=1.

Chapitre 12

Applications linéaires en dimension finie

Introduction

Nous reprenons ici l'étude des applications linéaires d'un espace de dimension finie dans un autre espace de dimension finie. Nous regarderons alors ce qu'apporte la notion de base à cette étude.

12.1 Bases et applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K, de dimensions respectives m et n. Soit $e = (e_1, \cdots, e_m)$ et $f = (f_1, \cdots, f_n)$ des bases respectives de E et de F. ϕ est une application linéaire de E dans F.
Ex-1 Montrer que $Im(\phi) = [\phi(e_1), \cdots, \phi(e_m)]$.

Définition 12.1.1 *On appelle* **rang** *d'une application linéaire, la dimension de son image.*

Ex-2 Soit G un sous espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe une application linéaire θ de E dans F telle que $Ker(\theta) = G$.

Ex-3 Soit G un sous espace vectoriel de E. Dans E on définit la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in G$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Montrer que sur l'ensemble quotient on définit une structure d'espace vectoriel en posant

$$cl(x) + cl(y) = cl(x + y),$$
$$\lambda cl(x) = cl(\lambda x),$$

où $cl(x)$ désigne la classe d'équivalence de x.

Définition 12.1.2 *L'espace vectoriel définit précédemment est appelé* **espace quotient** *de E par G, on le note E/G.*

Ex-4 Soit D un supplémentaire de G dans E.

$$E = G \oplus D.$$

Si x et y sont deux éléments de E alors x et y s'écrivent de manière unique sous la forme $x = g_x + d_x$ et $y = g_y + d_y$ avec $g_x, g_y \in G$, $d_x, d_y \in D$.
Montrer que si $x - y \in G$ alors $d_x = d_y$.
On peut alors définir l'application p de E/G dans D par

$$p(cl(x)) = d_x.$$

Montrer que p est une application linéaire.
Montrer que p est bijective.
Quelle est la dimension de E/G ?
On remarque qu'il est en un certain sens équivalent de travailler avec un supplémentaire de G ou avec E/G.

Ex-5 (**factorisation des applications linéaires**) Montrer qu'il existe une application injective Φ unique de $E/Ker(\phi)$ dans F, telle que $\phi = \Phi \circ s$ où s est la surjection naturelle de E sur $E/Ker(\phi)$.
Si de plus ϕ est surjective alors Φ est bijective.

Ex-6 Soit D un supplémentaire de $Ker(\phi)$ dans E. Montrer que la restriction Φ_1 de ϕ à D est surjective. Comparer Φ_1 à l'application Φ de l'exercice précédent.

Définition 12.1.3 *Soit $e' = (e'_1, \cdots, e'_m)$ une autre base de E. La matrice P de l'application identité de E muni de la base e' sur E muni de la base e est* **la matrice de passage** *de la base e à la base e'. Ainsi les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base e' dans l'ancienne base e.*

Ex-7 Montrer que P est inversible.

Ex-8 Soit $e' = (e'_1, \cdots, e'_m)$ une autre base de E et $f' = (f'_1, \cdots, f'_n)$ une autre base de F. Notons P la matrice de passage de la base e à la base e' et Q la matrice de passage de la base f à la base f'. Si A est la matrice de ϕ pour les bases e et f, montrer que la matrice A' de ϕ pour les bases e' et f' vérifie

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Ainsi, dans le cas où $F = E$ et où $f = e$, $f' = e'$ on obtient pour l'endomorphisme ϕ

$$A' = P^{-1}AP.$$

Ex-9 Etudier le cas où $F = E^*$, $f = e^*$ (base duale de E) et $f' = e'^*$.
Si P est la matrice de passage de e à e', quelle est la matrice de passage de e^* à e'^* ?
Montrer que

$$A' = P^tAP.$$

Ex-10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $e = (e_1, \cdots, e_m)$ une base fixée dans E, f une application linéaire de E dans E (endomorphisme ou opérateur) de matrice A dans les bases données. Montrer que A est inversible (f inversible) si et seulement si $det(A) \neq 0$.

Ex-11 Expression de l'inverse d'une matrice.
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre n. Si $1 \leq i, j \leq n$, notons $A_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant de la matrice A la ligne i et la colonne j.
On appelle **cofacteur** de $a_{i,j}$ le nombre $(-1)^{i+j}det(A_{i,j})$.
Montrer que

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\Big(C_{i,j}\Big)_{i,j}$$

où $C_{i,j}$ est le cofacteur de $a_{j,i}$.

12.2 Exemples

Ex-12 Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Soit $m < n$ et $x_0, \cdots x_m$ des réels distincts. Soit F le sous espace des multiples du polynôme $N(X) = (X - x_0) \cdots (X - x_m)$. Quelle est la dimension du quotient $\mathbb{R}_n[X]/F$?

Déterminer un isomorphisme de ce quotient sur $\mathbb{R}_m[X]$.

Ex-13 Dans le plan de la géométrie euclidienne on considère une base orthonormée (e_1, e_2). Soit R_θ la rotation vectorielle d'angle θ. On considère la base (f_1, f_2) où $f_1 = R_\theta(e_1)$ et $f_2 = R_\theta(e_2)$. Quelle est la matrice de passage de la base (e_1, e_2) à la base (f_1, f_2) ? On considère l'application linéaire de matrice

$$S = \begin{pmatrix} \rho_1 cos(\theta_1) & -\rho_1 sin(\theta_1) \\ \rho_1 sin(\theta_1) & \rho_1 cos(\theta_1) \end{pmatrix}$$

dans la base (e_1, e_2). Quelle est la matrice de cette application linéaire dans la base (f_1, f_2) ?

Chapitre 13

Systèmes linéaires

Introduction

La résolution d'un système linéaire de m équations à n inconnues (pouvant prendre leurs valeurs dans un corps donné) s'interprête en terme d'algèbre linéaire comme la recherche d'un vecteur dans un espace de dimension n dont l'image par une application linéaire donnée est un vecteur donné dans un espace de dimension m. Nous verrons à ce propos plusieurs problèmes distincts : existence d'une solution, unicité, détermination de la ou des solutions, algorithmes effectifs de calcul.

13.1 Problèmes linéaires en dimension finie

Un système linéaire de m équations à n inconnues est un système du type

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

où les inconnues x_i sont à chercher dans un corps K , les coefficients $a_{i,j}$ du système sont dans K, et les données b_i des seconds membres sont aussi dans K.

Pour un tel système les problèmes posés sont les suivants :
a) Le système possède-t-il **au moins une solution ?**
b) S'il existe une solution **est elle unique ?**

c) S'il existe des solutions peut on les écrire suivant **une formule** en fonction des coefficients et des seconds membres ?

d) Comment **calculer numériquement** une solution lorsqu' on se donne des valeurs numériques explicites pour les coefficients et les seconds membres ? En particulier ce calcul peut il être réalisé pratiquement à partir de formules closes ?

La première chose que nous allons faire est d'interpréter de diverses manières en termes d'algèbre linéaire le problème posé. Nous verrons que ces diverses façons de voir sont **toutes** intéressantes par les divers éclairages qu'elles apportent au problème.

La première présentation est celle sous forme de système que nous avons donnée. Partant de là, considérons l'application linéaire L de K^n dans K^m qui à tout $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ fait correspondre $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ où $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Notons $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ le vecteur de K^m constitué par les seconds membres du système. Dans ces conditions on cherche les solutions de $L(x) = b$, c'est-à-dire les vecteurs x de K^n dont l'image par L est un vecteur donné b de K^m. Sous cette forme il est clair que la résolution du système linéaire passe par l'étude de l'application linéaire L. D'ailleurs, si on munit K^n et K^m de leurs bases naturelles, on peut écrire le système sous forme matricielle

$$Ax = b$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre sur les formes linéaires, on peut considérer que l'étude d'une application linéaire de K^n dans K^m peut se faire par l'étude de m formes linéaires sur K^n. Plus précisément, notons L_i $(1 \leq i \leq m)$ la forme linéaire sur K^n définie par

$$\text{Ł}_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

Dans cette optique la recherche des solutions du système se ramène à la recherche des solutions communes aux m équations

$$L_i(x) = b_i.$$

Comme les solutions de chaque équation définissent un **hyperplan affine** (cas $L_i \neq 0$), ou **l'espace tout entier** (cas $L_i = 0, b_i = 0$), ou encore **l'ensemble vide** (cas $L_i = 0, b_i \neq 0$), on voit bien la **signification géométrique** de l'ensemble des solutions : c'est une intersection d'objets du type précédent.

Remarquons encore que si on appelle $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les vecteurs colonnes (donc éléments de K^m) de la matrice A, le problème posé se ramène aussi à trouver les coefficients x_i d'une combinaison linéaire de ces vecteurs qui vaille b :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = b.$$

Enfin compte tenu de l'interprétation du problème en terme d'algèbre linéaire on peut penser à l'exprimer de manière qui semble plus générale :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m sur un corps K, et L une application linéaire de E dans F. Etant donné $b \in F$ existe-t-il $x \in E$ tel que $L(x) = b$?

En fait en fixant une base dans E et une base dans F, on se ramène à un système du type défini précédemment, si bien que cette façon de poser le problème n'est pas réellement plus générale. Cependant elle est intéressante car elle permet de s'affranchir de l'aspect analytique qu'imposent des bases fixées pour une expression plus intrinsèque. A titre d'exemple citons le problème d'interpolation suivant : considérons $u_0, \cdots, u_{m-1}$ des points distincts de $\mathbb{R}$. Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (espace des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré $\leq n-1$) dans $\mathbb{R}^m$ qui à tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ fait correspondre $(P(u_0), \cdots, P(u_{m-1}))$. Etant donné $b = (b_0, \cdots, b_{m-1})$ un élément de $\mathbb{R}^m$, trouver P tel que $L(P) = b$ (ou encore tel que pour tout $0 \leq i \leq m - 1, P(u_i) = b_i$).

Remarquons encore que le problème sous sa forme intrinsèque peut se présenter à l'aide de formes linéaires sous la forme suivante : soit E un espace vectoriel de dimension n sur K ; soient $L_1, \cdots, L_m$ des formes linéaires sur E et $b_1, \cdots, b_m$ des éléments de K ; trouver les vecteurs x de E tels que pour tout $1 \leq i \leq m$ on ait $L_i(x) = b_i$. A titre d'exemple le problème d'interpolation cité au dessus s'exprime facilement sous cette forme.

En conclusion disons que nous utiliserons pour chaque problème linéaire à résoudre l'une ou l'autre de ces formes, en choisissant bien entendu la plus commode compte tenu du contexte.

Ex-1 On reprend les notations de l'introduction et on suppose $m = n$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1) le problème linéaire $L(x) = b$ a une solution et une seule pour tout $b \in K^m$;
2) L est bijective ;
3) $Ker(L) = \{0\}$;
4) $det(A) \neq 0$;
5) il existe $b \in K^m$ tel que le problème $L(x) = b$ ait une solution et une seule.

Donner des exemples et des contre-exemples.

Définition 13.1.1 *Lorsque, dans le cas où $m = n$, les conditions équivalentes précédentes sont réalisées, on dit que le système linéaire considéré est un* **système de Cramer**. *Remarquons que le fait d'être un système de Cramer ne dépend pas du second membre du système.*

Ex-2 Montrer que si $m \neq n$ il n'est pas possible que le système ait une solution et une seule (c'est-à-dire que soit il n'a pas de solution, soit il a plusieurs solutions). Donner des exemples de chaque cas.

Dans le cas général l'analyse du problème n'est pas très difficile à faire en regardant le noyau et l'image de l'application linéaire L.

Ex-3 Si le système a une solution $x = (x_1, \cdots, x_n)$ l'ensemble de toutes les solutions est $x + Ker(L)$.

Le système a une solution si $b \in Im(L)$. En particulier le système homogène associé $(L(x) = 0)$ a toujours une solution (0 est toujours solution).

Si le rang de L est m (dimension de l'espace d'arrivée F) le système a toujours une solution, sinon il existe des cas où il n'en a pas.

Si le noyau de L est réduit au vecteur nul il y a au plus une solution.

Les divers cas précédents peuvent éventuellement être détectés par des valeurs de déterminants.

Ex-4 Nous cherchons à résoudre $L(x) = b$ où L est une application linéaire de l'espace vectoriel E de dimension n dans l'espace vectoriel F de dimension m (espaces dans lesquels on suppose que des bases ont été fixées). Nous notons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ la matrice de L dans les bases fixées. Soit r le rang de L (dimension de l'image). On sait alors qu'il existe un sous déterminant d'ordre

r non nul extrait de la matrice A (on supposera pour fixer les idées que c'est celui obtenu pour $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq r$) et que tout sous déterminant d'ordre $r+1$ extrait de A est nul. Montrer que le système admet une solution si et seulement si pour tout $1 \leq s \leq m-r$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,r} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & b_r \\ a_{r+s,1} & \cdots & a_{r+s,r} & b_{r+s} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ex-5 Dans le cas d'un système de cramer dont la matrice (carrée) est $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ dont les seconds membres sont $b_1, \cdots, b_n$ l'unique solution $(x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n)$ s'écrit

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Les formules précédentes, dites **formule de Cramer** ne sont pas employées pour la résolution explicite numérique des systèmes (sauf éventuellement en petite dimension). Parmi les méthodes explicites de résolution, la méthode du **pivot de Gauss** (ou encore méthode par **élimination**) est très simple. Divers algorithmes plus ou moins élaborés réalisent cette élimination. Nous proposons ici l'algorithme suivant dit algorithme de Crout.

Ex-6 Soit A une matrice carrée d'ordre n dont le déterminant est non nul

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$$

On cherche deux matrices carrées d'ordre n

$$L = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \quad avec\ \alpha_{i,j} = 0\ si\ j > i$$

$$U = (\beta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \quad avec\ \beta_{i,j} = 0\ si\ j < i$$

telles que $A = LU$.

Combien y a-t-il de coefficients à déterminer ?
Combien y a-t-il d'équations qui permettent de les déterminer ?
Ceci explique qu'on puisse en outre imposer

$$\beta_{i,i} = 1 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Puisqu'on sait que les coefficients $\beta_{i,i}$ valent 1 , on ne les stocke pas. On va donc pouvoir mettre les deux matrices L et U dans le même tableau T carré d'ordre n (L matrice triangulaire inférieure et U matrice triangulaire supérieure).
Pour chaque couple (i, j) vérifiant $1 \leq i, j \leq n$ on dispose donc de la relation

$$\sum_{k=1}^{inf(i,j)} \alpha_{i,k}\beta_{k,j} = a_{i,j}$$

étape 1

1) Calculer les $\alpha_{i,1}$ en fonction des $a_{i,1}$.

2) Permutation des lignes afin que parmi tous les $\alpha_{i,1}$ ainsi calculés, celui de plus grande valeur absolue se trouve en position $(1, 1)$. Par abus de notation nous appellerons toujours ces nombres $\alpha_{i,1}$. Montrer qu'après permutation $\alpha_{1,1} \neq 0$.

3) Calculer les $\beta_{1,j}$ pour $j > 1$ en fonction des $a_{1,j}$ et de $\alpha_{1,1}$.

On peut itérer ce calcul : supposons calculées les $p-1$ premières lignes et les $p-1$ premières colonnes.

étape p

1) Calcul de la p^{e} colonne (à partir du rang p) c'est à dire des éléments $\alpha_{i,p}$ pour $i \geq p$. Montrer que $\alpha_{i,p}$ se calcule en fonction de $a_{i,p}$ et d'éléments déjà calculés.

2) Permutation des lignes pour mettre le $\alpha_{i,p}$ (où $i \geq p$) de plus grande valeur absolue en position (p, p). On montrera alors que le $\alpha_{p,p}$ ainsi trouvé est non nul.

3) Calcul de la p^{e} ligne à partir du rang $p + 1$, c'est à dire des éléments $\beta_{p,j}$ pour $j > p$. Montrer que $\beta_{p,j}$ s'exprime en fonction de $a_{p,j}$ et d'éléments déjà calculés.

Remarque

Lorsqu'on utilise cette transformation de la matrice A sous la forme LU pour résoudre le système $AX = B$ on est amené à tenir compte des diverses

permutations faites sur les lignes en faisant des permutations analogues sur les composantes de B. on a alors ensuite à résoudre $LUX = B$, soit encore $LY = B$ puis $UX = Y$.

Ex-7 Montrer que le système $L(x) = b$ admet une solution si et seulement si pour toute solution u de $L^*(u) = 0$ on a $u(b) = 0$.

13.2 Résolution explicite de systèmes linéaires

Ex-8 Résoudre

$$\left\{\begin{array}{llllll} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

Ex-9 Quand le système suivant possède-t-il une solution unique ?

$$\left\{\begin{array}{llllll} ax_1 & +bx_2 & +cx_3 & +dx_4 & = & 0 \\ bx_1 & -ax_2 & +dx_3 & -cx_4 & = & 0 \\ cx_1 & -dx_2 & -ax_3 & +bx_4 & = & 0 \\ dx_1 & +cx_2 & -bx_3 & -ax_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ex-10 Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Ex-11 Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

Ex-12 Soit à résoudre un système de **Cramer** du type

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Notons pour $1 \leq k \leq n$

$$S_k = \begin{pmatrix} s_1^k \\ \vdots \\ s_n^k \end{pmatrix}$$

la solution du système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,1}x_1 + \cdots + a_{k-1,n}x_n & = & 0 \\ a_{k,1}x_1 + \cdots + a_{k,n}x_n & = & 1 \\ a_{k+1,1}x_1 + \cdots + a_{k+1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

Montrer que la solution cherchée est

$$b_1 S_1 + \cdots + b_n S_n.$$

On pourra montrer que $(S_1, \cdots, S_n)$ est une base de K^n. Quelle est sa base duale ?

Chapitre 14

Valeurs propres, vecteurs propres

Introduction

Nous étudions ici les notions très importantes de vecteurs propres et valeurs propres. Nous traiterons d'abord le cas simple de la diagonalisation des applications linéaires. Nous reprendrons ensuite l'étude de la décomposition spectrale de manière plus complète, en se plaçant toutefois dans le cas où le corps de base est algébriquement clos.

14.1 Une première étude des valeurs propres et vecteurs propres

Définition 14.1.1 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$. Soit T un opérateur de E. Un* **vecteur propre** *de T est un vecteur* **non nul** *e tel que $T(e) = \lambda e$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Un tel nombre λ est appelé une* **valeur propre** *de T.*

Ex-1 Montrer que pour que λ soit valeur propre de T il faut et il suffit que $det(T - \lambda I) = 0$. En conclure qu'il existe au moins une valeur propre et au plus n valeurs propres.

Définition 14.1.2 *Le polynôme en λ $det(T - \lambda I)$ est appelé* **polynôme caractéristique** *de T.*

Ex-2 Soit V_λ l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ. Montrer que $S_\lambda = V_\lambda \cup \{0\}$ est un sous espace vectoriel de E. Cet espace est appelé **sous espace propre** associé à λ.

Ex-3 Montrer que si r vecteurs de E sont des vecteurs propres associés à r valeurs propres distinctes de T, alors ces r vecteurs sont linéairement indépendants.

Ex-4 Montrer que si le polynôme caractéristique de T n'admet pas de racines multiples alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de T (attention le corps de base est $\mathbb{C}$ ou un corps algébriquement clos).

Ex-5 Supposons qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de T (par exemple comme nous l'avons vu si toutes les valeurs propres de T sont distinctes). Quelle est la matrice de T dans cette base ?

On a ainsi dans l'exercice précédent **diagonalisé** la matrice de T (c'est-à-dire trouvé une base de E dans laquelle la matrice de l'opérateur T est diagonale). Plusieurs problèmes se posent alors. Que se passe-t-il dans le cas où le polynôme caractéristique a des racines multiples ? Peut on toujours réduire la matrice de T en choisissant une bonne base ? Nous allons pour répondre à ces questions développer le paragraphe suivant. Il restera à voir ce qu'il se passe quand le corps n'est pas algébriquement clos, et que le polynôme caractéristique n'a pas autant de racines qu'il le faudrait. Nous ne développerons pas cette question. Disons simplement que dans ce cas, on peut "grossir" le corps de base en se plaçant dans sa clôture algébrique. Ceci demande de définir la "complexification" d'un espace vectoriel, ce que nous ne ferons pas ici.

14.2 Décomposition spectrale des opérateurs

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Soit T un endomorphisme de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{A}(T)$ la sous algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ des endomorphismes de $\mathcal{X}$ engendrée par l'opérateur T.

14.2.1 L'algèbre engendrée par un opérateur.

Il est facile de voir que l'algèbre $\mathcal{A}(T)$ est constituée par les opérateurs $P(T)$ où les éléments P sont les polynômes de l'espace $\mathbf{C}[X]$. On remarquera que $\mathcal{A}(T)$ est une **algèbre commutative**.

Soit Φ l'application de $\mathbf{C}[X]$ dans $\mathcal{A}(T)$ qui à un polynôme P fait correspondre l'opérateur $P(T)$. Cette application Φ est visiblement surjective. Elle ne peut pas être injective car $\mathcal{A}(T)$ est de dimension finie alors que $\mathbf{C}[X]$ est de dimension infinie. Le noyau $Ker(\Phi)$ de Φ n'est donc pas réduit à $\{0\}$. Ce noyau est un idéal de $\mathbf{C}[X]$. On en déduit que $Ker(\Phi)$ est engendré par un polynôme M normalisé de degré minimal unique (en effet $\mathbf{C}[X]$ est un anneau principal). Remarquons que ce polynôme n'est pas nul (le noyau n'est pas $\{0\}$) et n'est pas 1. Donc le degré de M est supérieur ou égal à 1. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 14.2.1 *Il existe un polynôme normalisé et un seul M tel que tout polynôme P vérifiant $P(T) = 0$ soit un multiple de M. Ce polynôme de degré minimal parmi ceux qui sont annulés par T est de degré supérieur ou égal à 1.*

Définition 14.2.1 *Le polynôme M du théorème précédent est appelé polynôme minimal de l'opérateur T.*

Puisque le corps de base est algébriquement clos il est clair que le polynôme minimal se décompose en produit de facteurs de la forme $(X - \lambda)^k$. Ceci nous incite à étudier les opérateurs de la forme $(T - \lambda I)^k$.

14.2.2 Les opérateurs $(T - \lambda I)^k$.

Pour tout $k \geq 0$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$ définissons

$$\mathcal{N}_\lambda^k = Ker(T - \lambda I)^k$$

Il est clair que la suite de sous espaces $(\mathcal{N}_\lambda^k)_{k\geq 0}$ est croissante (pour l'inclusion). Comme $\mathcal{X}$ est de dimension finie, cette suite ne peut être strictement croissante, il existe donc un plus petit entier $\nu(\lambda)$ appelé **index** de λ tel que

$$\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)} = \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+1}$$

Théorème 14.2.2 *Si $\nu(\lambda)$ est l'index du nombre complexe λ alors pour tout entier $p \geq 0$*

$$\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)} = \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p}$$

Démonstration Montrons par récurrence que pour tout $p \geq 0$ $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p} = \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+1}$. On sait que le résultat est vrai pour p=0. Supposons le vrai pour un entier $p \geq 0$ et montrons alors qu'il est vrai pour $p+1$. Si $x \in \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+2}$ alors $(T-\lambda I)(x) \in \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+1}$ et par hypothèse de récurrence $(T-\lambda I)(x) \in \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p}$. Donc $x \in \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+1}$ et par suite $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+1} = \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)+p+2}$.

Notons n_λ la dimension du sous espace $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$. Compte tenu de la croissance stricte de la suite $(\mathcal{N}_\lambda^k)_k$ pour $0 \leq k \leq \nu(\lambda)$, on a l'inégalité $\nu(\lambda) \leq n_\lambda \leq n$.

14.2.3 Spectre, index et polynôme minimal.

Définition 14.2.2 *Le spectre de l'opérateur T, noté $\sigma(T)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $T-\lambda I$ ne soit pas inversible.*

Remarque :

- Nous sommes ici en dimension finie, donc il est équivalent dans ce cas de dire que le spectre est constitué des λ tels que $T-\lambda I$ ne soit pas injectif, c'est à dire tels que $\mathcal{N}_\lambda^1 \neq \{0\}$.
- Si λ n'est pas dans le spectre de T alors l'index $\nu(\lambda)$ est nul. Par contre s'il est dans le spectre, son index est supérieur ou égal à 1.

Définition 14.2.3 *Lorsque λ est une valeur propre (i.e. $\nu(\lambda) \geq 1$), le sous espace $\mathcal{N}_\lambda^1$ est appelé sous espace propre de T et ses éléments non nuls sont les vecteurs propres de T.*
Le sous espace $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ est appelé sous espace spectral associé à λ.

Théorème 14.2.3 *Le spectre de T est un ensemble fini et le polynôme minimal M de T s'exprime sous la forme*

$$M(X) = \prod_{\lambda \in \sigma(T)} (X-\lambda)^{\nu(\lambda)}$$

Démonstration Soit R un polynôme non nul tel que $R(T)=0$. Supposons que R ait une racine λ qui ne soit pas dans le spectre. Alors $R(X) = (X-\lambda)R_1(X)$. Ainsi $R(T) = R_1(T)(T-\lambda I)$. Et comme $T-\lambda I$ est inversible et $R(T)=0$ on en conclut que $R_1(T)=0$. Si R a une racine λ qui est dans le spectre, et qui a une multiplicité $\nu(\lambda)+p$ avec $p \geq 1$ alors $R(T) = (T-\lambda I)^{\nu(\lambda)+p}R_2(T)$. Donc $R(T)=0$ implique que pour tout x $R_2(T)(x)$

appartient au noyau de $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)+p}$ c'est à dire au noyau de $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}$. On a donc aussi en posant $R_3(T)=(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}R_2(T)$ l'égalité $R_3(T)=0$. La conclusion de cette première partie est qu'il existe un polynôme annulé par T, donc multiple de M, qui a pour racines des éléments λ du spectre avec une multiplicité $\leq \nu(\lambda)$. Soit donc maintenant P un tel polynôme annulé par T et soit λ un élément du spectre de T. Alors il existe un vecteur y non nul tel que $T(y)=\lambda y$. Si bien que $P(T)(y)=P(\lambda)y$, et comme P(T)=0, on obtient $P(\lambda)=0$. (On vient de montrer en passant que le spectre est un ensemble fini). Supposons maintenant que la multiplicité α de cette racine λ soit strictement inférieure à $\nu(\lambda)$. Alors il existe $x_1\neq 0$ tel que $(T-\lambda I)^{\alpha+1}(x_1)=0$ et $y_1=(T-\lambda I)^{\alpha}(x_1)\neq 0$. $P(X)$ peut s'écrire sous la forme $P(X)=(X-\lambda)^{\alpha}Q(X)$ avec $Q(\lambda)\neq 0$. Comme $T(y_1)=\lambda y_1$ on peut écrire $P(T)(x_1)=Q(T)(y_1)=Q(\lambda)y_1\neq 0$ ce qui contredit le fait que $P(T)=0$.

14.2.4 Décomposition de l'espace en sous espaces spectraux.

Théorème 14.2.4 *Chaque sous espace $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ est stable par l'opérateur T.*

Démonstration $T(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}=(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}T$ donc si $x\in Ker(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}$ alors $T(x)\in Ker(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}$.

Lemme 14.2.1 *Si $\lambda\neq\mu$ alors $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}\bigcap\mathcal{N}_\mu^{\nu(\mu)}=\{0\}$.*

Démonstration En effet soit x un élément supposé non nul de l'intersection et $\alpha<\nu(\lambda)$ le plus grand entier tel que $z=(T-\lambda I)^{\alpha}(x)\neq 0$. Donc $T(z)=\lambda z$. Si bien que $(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(z)=(\lambda-\mu)^{\nu(\mu)}z\neq 0$. D'autre part $(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(z)=(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(T-\lambda I)^{\alpha}(x)$ soit $(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(z)=(T-\lambda I)^{\alpha}(T-\mu I)^{\nu(\mu)}(x)=0$. D'où la contradiction.

Les projecteurs associés au polynôme minimal.

Introduisons les polynômes $Q_\lambda(X)=\frac{M(X)}{(X-\lambda)^{\nu(\lambda)}}$. Les polynômes $(Q_\lambda)_{\lambda\in\sigma(T)}$ sont premiers dans leur ensemble, d'après le théorème de Bezout il existe donc des polynômes A_λ tels que

$$\sum_{\lambda\in\sigma(T)} A_\lambda Q_\lambda = 1$$

Posons pour tout λ du spectre

$$S_\lambda(X) = A_\lambda(X) Q_\lambda(X).$$

Les polynômes S_λ vérifient les propriétés suivantes :

Théorème 14.2.5

1. *La somme des* S_λ *vaut* 1.
2. *Le produit* $S_\lambda S_\mu$ *lorsque* $\lambda \neq \mu$, *est un multiple du polynôme minimal* M.
3. *Le produit de* S_λ *par* $(X-\lambda)^{\nu(\lambda)}$ *est un multiple du polynôme minimal* M.
4. $S_\lambda(\lambda) = 1$ *et pour tout autre élément* $\mu \neq \lambda$ *du spectre* $S_\lambda(\mu) = 0$.

Démonstration Les propriétés 1) 2) et 3) proviennent immédiatement des définitions des polynômes S_λ. La propriété 4) provient de 1) et de la définition de S_λ.

Notons alors pour tout λ du spectre $I_\lambda = S_\lambda(T)$. Les opérateurs I_λ vérifient :

Théorème 14.2.6

1. $\sum_{\lambda \in \sigma(T)} I_\lambda = I$.
2. *Si* $\lambda \neq \mu$ *alors* $I_\lambda I_\mu = 0$.
3. $I_\lambda I_\lambda = I_\lambda$
4. $(T - \lambda I)^{\nu(\lambda)} I_\lambda = 0$.
5. $T I_\lambda = I_\lambda T$

Démonstration 1) 2) et 4) sont des conséquences immédiates du théorème précédent sur les polynômes S_λ. la propriété 3) est une conséquence claire de 1) et 2). La propriété 5) provient du fait que I_λ est un polynôme en T.

Remarque : Les opérateurs I_λ sont des projecteurs.

Décomposition de l'espace.

Notons $\mathcal{X}_\lambda = I_\lambda(\mathcal{X})$.

Théorème 14.2.7 *L'opérateur T laisse stable $\mathcal{X}_\lambda$.*

Démonstration Ceci provient de $TI_\lambda = I_\lambda T$.

Théorème 14.2.8 *On a pour tous les éléments λ et μ distincts, dans le spectre les relations suivantes :*

$$I_\lambda(\mathcal{X}_\mu) = \{0\}$$

et pour tout $x \in \mathcal{X}_\lambda$

$$I_\lambda(x) = x$$

Démonstration Ceci est une conséquence immédiate du fait que les opérateurs I_λ sont des projecteurs qui vérifient $I_\lambda I_\mu = 0$.

Théorème 14.2.9 *L'espace se décompose sous la forme*

$$\mathcal{X} = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} \mathcal{X}_\lambda$$

Démonstration Du fait que $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} I_\lambda = I$ il est clair que $\mathcal{X} = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \mathcal{X}_\lambda$. Si $\sum_{\lambda\in\sigma(T)} x_\lambda = 0$ avec $x_\lambda \in \mathcal{X}_\lambda$. Pour tout μ dans le spectre on peut écrire $I_\mu(\sum_{\lambda\in\sigma(T)} x_\lambda) = x_\mu$. D'où $x_\mu = 0$ et ceci pour tout μ.

Théorème 14.2.10

$$\mathcal{X}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$$

Démonstration Puisque $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)} I_\lambda = 0$ on conclut que $\mathcal{X}_\lambda \subset \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$. Soit alors $x \in \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$. D'après le résultat précédent x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{\mu\in\sigma(T)} x_\mu$ où x_μ est dans $\mathcal{X}_\mu$ (et par suite aussi dans $\mathcal{N}_\mu^{\nu(\mu)}$). Donc

$$0 = (T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}(x) = \sum_{\mu\in\sigma(T)} (T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}(x_\mu).$$

Mais les $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}(x_\mu)$ sont eux même dans $\mathcal{X}_\mu$ à cause de la stabilité par T de ces sous espaces. Donc en vertu de l'unicité de la décomposition de 0 on en conclut que pour tout μ dans le spectre $(T-\lambda I)^{\nu(\lambda)}(x_\mu) = 0$. Mais si $\lambda \neq \mu$ comme x_μ est dans $\mathcal{N}_\mu^{\nu(\mu)}$ il ne peut être aussi dans $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ que s'il est nul (lemme 5.1). Par suite $x = x_\lambda$ et donc $x \in \mathcal{X}_\lambda$.

Définition 14.2.4 *Les projecteurs I_λ sont appelés les projecteurs spectraux de T.*

Remarque :

- Désormais pour étudier l'opérateur T on pourra l'étudier sur chacun des sous espaces spectraux $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$. Nous verrons par la suite des exemples de cette stratégie.
- La somme des dimensions n_λ des sous espaces $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ est n. La somme des index est donc $\leq n$.

Définition 14.2.5 *Un opérateur est dit diagonal si $\mathcal{X}$ est la somme directe de ses sous espaces propres.*

Remarque : Ceci se produit si et seulement si les index des valeurs propres sont tous égaux à 1. Ce qui veut encore dire que $dimKer(T-\lambda I) = n_\lambda$ pour toute valeur propre λ. Il est aisé de voir qu'un opérateur T est diagonal si et seulement s'il peut se mettre sous forme diagonale dans une base bien choisie.

Théorème 14.2.11 *Tout opérateur T s'écrit de manière unique sous la forme $T = D + N$ où D est un opérateur diagonal et où N est un opérateur nilpotent qui commute avec D.*

Démonstration Définissons l'opérateur D par $D(x) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda x_\lambda$ où $x = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} x_\lambda$. Soit alors $N = T - D$. Il est clair que la décomposition $T = D + N$ est bien du type indiqué. Pour l'unicité supposons qu'on ait pu décomposer T sous la forme indiquée. D étant diagonal on peut trouver des sous espaces $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tels que $\mathcal{X} = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ et que la restriction D_i de D à E_i soit $\lambda_i I$. Si $x \in E_i$ alors $T(x) = \lambda_i x + N(x)$ ou encore $N(x) = (T - \lambda_i I)(x)$; N commutant avec D il laisse stable les sous espaces propres E_i de D, donc désormais tout se passe dans E_i, en particulier $N^r(x) = (T - \lambda_i I)^r(x)$. Comme N est nilpotent il existe ν_i tel que $(T - \lambda_i I)^{\nu_i}(x) = 0$. En prenant $x \neq 0$ on conclut que $Ker(T - \lambda_i I)^{\nu_i} \neq \{0\}$, donc que $\lambda_i \in \sigma(T)$. Par suite il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $E_i \subset \mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ (et deux E_i distincts sont dans des $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ distincts). Par suite les E_i sont les $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ et on retombe sur la décomposition dejà trouvée.

14.2.5 Polynôme caractéristique

Définition 14.2.6 *On appelle polynôme caractéristique de T le polynôme $\Delta(X) = det(T - XI)$.*

Compte tenu de l'interprétation du determinant, les racines de Δ sont les valeurs pour lesquelles $T - XI$ n'est pas injectif, donc sont les valeurs propres de T. Il suffit de décomposer T sur les sous espaces $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$ pour voir que

$$\Delta(X) = \prod_{\lambda \in \sigma(T)} (\lambda - X)^{n_\lambda}$$

En particulier comme $\nu(\lambda) \leq n_\lambda$ Δ est un multiple de M donc

Théorème 14.2.12 *(Cayley Hamilton) Le polynôme caractéristique est annulé par T.*

14.2.6 Appendice : Une autre approche des projecteurs spectraux

Fonctions analytiques d' opérateurs

La construction que nous avons donnée des projecteurs spectraux utilise le théorème de Bezout sur les polynômes. On va se placer ici dans une classe de fonctions plus large afin d'obtenir une partition de l'unité plus directe. La classe que nous allons utiliser est celle des fonctions analytiques. Le premier pas est donc de définir l'image d'un opérateur par une fonction analytique et d' étudier quelques propriétés des opérateurs ainsi obtenus. La définition en vue utilise l'interpolation de Lagrange Sylvester.

Notons $\mathcal{H}(T)$ la classe des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes qui sont analytiques dans un ouvert contenant le spectre de T (cet ouvert pouvant varier suivant la fonction considérée dans la classe).

Si $f \in \mathcal{H}(T)$ on sait qu' il existe un polynôme P tel que pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, et tout $m \leq \nu(\lambda) - 1$

$$f^{(m)}(\lambda) = P^{(m)}(\lambda).$$

On définit l'opérateur $f(T)$ par

$$f(T) = P(T).$$

Il est clair que la définition est indépendante du polynôme d' interpolation P (cf. théorème 4.1).
Les résultats suivants découlent immédiatement des propriétés des polynômes.

Théorème 14.2.13 *Si f et g sont dans $\mathcal{H}(T)$ et si α et β sont deux nombres complexes, alors*

1. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}(T)$ *et* $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$.
2. $fg \in \mathcal{H}(T)$ *et* $fg(T) = f(T)g(T)$.
3. *si* $f(z) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k z^k$ *alors* $f(T) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k T^k$.
4. $f(T) = 0$ *si et seulement si* $f^{(m)}(\lambda) = 0$ *pour tout* $\lambda \in \sigma(T)$ *et tout* $0 \leq m \leq \nu(\lambda) - 1$

Il découle de 2) que les opŕateurs $f(T)$ et $g(T)$ commutent.

Les projecteurs spectraux

Définissons pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ un disque ouvert D_λ de centre λ de telle sorte que ces disques soient deux à deux disjoints. Pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ on définit alors sur l'ouvert réunion des disques ainsi construits la fonction f_λ qui vaut 1 sur D_λ et 0 ailleurs. Il est clair que ces fonctions sont analytiques. On note alors E_λ l'opérateur $f_\lambda(T)$.

Théorème 14.2.14 *Pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ on a*

$$E_\lambda = I_\lambda$$

c'est-à-dire que les E_λ sont les projecteurs spectraux.

14.3 Exemples

Ex-1 Trouver le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les vecteurs propres et diagonaliser (si possible) les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex-2 Trouver le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les sous espaces propres des matrices suivantes. Sont elles diagonalisables ? Quels sont les polynômes minimaux des endomorphismes correspondants ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex-3 On appelle **bloc de Jordan** toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ou éventuellement une matrice (λ) de taille 1.

Montrer que tout opérateur linéaire d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie admet une matrice constituée de blocs diagonaux de Jordan et de 0 ailleurs.
Quelle forme simple peut on avoir si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Ex-4 Mettre sous forme de Jordan la matrice B de l'exercice 2.

Ex-5 Soit T un opérateur linéaire d'un espace vectoriel complexe E de dimension finie. Soit λ une valeur propre de T et supposons que le sous espace propre $(ker(T - \lambda I))$ associé à λ soit de dimension 1. Montrer que l'index $\nu(\lambda)$ est égal à la dimension n_λ du sous espace spectral $\mathcal{N}_\lambda^{\nu(\lambda)}$.

Chapitre 15

Interventions de l'algèbre linéaire

Introduction

Nous donnons dans ce chapitre, quelques exemples d'utilisation de l'algèbre linéaire dans divers domaines. Nous avons choisi comme illustration la théorie des signaux discrets finis et une partie de l'analyse numérique élémentaire.

15.1 Fonctions sur un groupe abélien fini,théorie du signal fini

On fixe un entier $n \geq 2$. Notons G le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathcal{F}$ l'espace des fonctions définies sur G à valeurs dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

15.1.1 L'espace $\mathcal{F}$

A tout élément a de G on associe la fonction e_a définie par

$$e_a(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = a, \\ 0 & si \quad x \neq a. \end{cases}$$

1) Montrer que la famille $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension n.

2) Soit $f \in \mathcal{F}$. Quelles sont les composantes de f sur la base $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$.

3) Décrire la base duale de la base $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$.

15.1.2 Les caractères de G

A tout élément u de G on associe la fonction χ_u définie par

$$\chi_u(v) = e^{\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

1) Montrer que les fonctions χ_u vérifient

$$\chi_u(x+y) = \chi_u(x)\chi_u(y), \quad (15.1)$$

$$\chi_u(0) = 1. \quad (15.2)$$

2) Montrer qu'on obtient ainsi toutes les fonctions complexes définies sur G vérifiant (1) et (2).

15.1.3 Produit scalaire hermitien sur $\mathcal{F}$

1) Montrer qu'on définit sur $\mathcal{F}$ un produit scalaire hermitien en posant

$$< f, g >= \sum_{u \in G} f(u)\overline{g(u)}.$$

2) Montrer que la base $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$ est orthonormée.

3) Calculer pour tout u et tout v dand G le produit scalaire $< \chi_u, \chi_v >$. En conclure que la famille $(\chi_u)_{0 \leq u \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{F}$, et que cette base est orthogonale.

4) Calculer en fonction des valeurs prises par f, les composantes de f dans la base $(\chi_u)_{0 \leq u \leq n-1}$.

15.1.4 Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, on définit la fonction $\widehat{f} \in \mathcal{F}$, par

$$\widehat{f}(v) = \sum_{u \in G} f(u) e^{-\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

1) Montrer que

$$f(u) = \frac{1}{n} \sum_{v \in G} \widehat{f}(v) e^{\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

En conclure que

$$\widehat{\widehat{f}}(u) = nf(-u).$$

2) Comparer $< f, g >$ et $< \widehat{f}, \widehat{g} >$. Comparer la norme de f avec celle de $\widehat{f}$.

3) Notons F l'opérateur de $\mathcal{F}$ qui à f associe $\widehat{f}$. Quelle est la norme de l'opérateur F.

4) Calculer $\widehat{f}$ lorsque $f = e_u$ et lorsque $f = \chi_u$.

15.1.5 Matrices associées aux objets précédents

1) Quelle est la matrice de F si $\mathcal{F}$ est muni de la base $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$?

2) Quelle est la matrice de F si $\mathcal{F}$ est muni de la base $(\chi_u)_{0 \leq u \leq n-1}$?

3) Calculer Det(F).

4) Calculer la matrice de passage P ainsi que son inverse, de la base $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$ à la base $(\chi_u)_{0 \leq u \leq n-1}$.

15.1.6 Fonctions de $\mathcal{F}$ et polynômes formels

A tout fonction $f \in \mathcal{F}$ on associe le polynôme $P_f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\leq n - 1$ défini par

$$P_f(X) = f(0) + f(1)X + \cdots + f(n-1)X^{n-1}.$$

Montrer que

$$\widehat{f}(v) = P_f(e^{-\frac{2i\pi v}{n}}),$$

et que

$$f(u) = \frac{1}{n} P_{\widehat{f}}(e^{\frac{2i\pi u}{n}}).$$

En conclure un algorithme pour trouver le polynôme P d'interpolation de Lagrange, de degré $\leq n - 1$, qui prend des valeurs données aux n points $e^{\frac{2i\pi u}{n}}$.

15.1.7 Convolution et filtres stationnaires

On définit la convolée $f_1 * f_2$ de deux fonctions de $\mathcal{F}$ par

$$f_1 * f_2(x) = \sum_{y\in G} f_1(x+y) f_2(-y).$$

1) Montrer que

$$f_1 * f_2(x) = f_2 * f_1(x) = \sum_{u+v=x} f_1(u) f_2(v)$$

.

2) Calculer $\widehat{f1 * f_2}$ et $\widehat{f_1 f_2}$.

3) Etudier $P_{f_1 * f_2}$ en fonction de P_{f_1} et P_{f_2}.

4) Pour tout $t \in G$ soit T_t l'opérateur de translation qui à la fonction f fait correspondre la fonction $T_t(f)$ telle que $T_t(f)(x) = f(x+t)$. Soit H un opérateur qui commute avec T_t pour tout t. Montrer que les χ_u forment une base de vecteurs propres de H. Quelles sont les valeurs propres associées ?. Montrer qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{F}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $H(f) = h * f$.

15.2 Analyse numérique : Interpolation

15.2.1 Introduction

L'**interpolation** est un sujet très vaste lié aux questions d'**approximation** des fonctions. Très grossièrement il s'agit de trouver dans une classe fixée de fonctions (par exemple les fonctions polynômiales) un élément réalisant un certain nombre de contraintes. Souvent ces contraintes sont liées à la donnée d'une fonction f qu'on cherche à approcher par un procédé d'interpolation (par exemple la fonction cherchée doit prendre la même valeur que f en des points donnés). On se trouve alors confronté à plusieurs problèmes de natures différentes. Tout d'abord un problème algébrique, celui de trouver le ou les éléments de la classe choisie qui réalise les contraintes. Ensuite un problème d'approximation qui consiste lorsqu'on est parti d'une fonction f à mesurer la qualité de l'approximation théorique obtenue. Enfin un problème algorithmique, celui de déterminer un algorithme performant qui permette de calculer facilement et de manière aussi exacte que possible la ou les solutions.

Dans un premier temps nous partirons d'un exemple important : l'interpolation de Lagrange.

15.2.2 Interpolation de Lagrange

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des nombres complexes distincts et $y_0, y_1, ..., y_n$ des nombres complexes. Il s'agit de trouver un polynôme $P(X)$ vérifiant $P(x_k) = y_k$ pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n.

L'aspect algébrique

Existence de solutions Notons $\mathbb{C}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. Considérons alors l'application linéaire T de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui à un polynôme $P(X)$ fait correspondre $(P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n))$. On voit que le noyau $Ker(T)$ de l'application T est l'espace constitué des multiples du polynôme $N(X) = (X - x_0)(X - x_1)...(X - x_n)$ et qu'on peut écrire

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}_n[X] \bigoplus Ker(T).$$

Ceci nous montre que la restriction de T à $\mathbb{C}_n[X]$ est une bijection de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

Le résultat obtenu est donc le suivant

Théorème 15.2.1 *Pour tout élément $(y_0, y_1, ..., y_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ il existe un polynôme $P(X)$ de degré $\leq n$ et un seul (polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que $P(x_k) = y_k$ $(0 \leq k \leq n)$. Tout polynôme $Q(X)$ (de degré quelconque) vérifiant aussi $Q(x_k) = y_k$ $(0 \leq k \leq n)$ s'écrit sous la forme*

$$Q(X) = P(X) + K(X)N(X).$$

Ecriture sous la forme naturelle (base des monômes) Si on cherche à trouver explicitement le polynôme de Lagrange écrit sous la forme habituelle $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ on est amené à résoudre le système de $n+1$ équations en les $n+1$ inconnues $a_0, ..., a_n$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 + a_1x_0 + ... + a_nx_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_1^n & = & y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 + a_1x_n + ... + a_nx_n^n & = & y_n \end{array}\right.$$

Ce système est un système de **Vandermonde** dont on sait bien sûr qu'il admet une solution unique. Nous fournirons ultérieurement un algorithme pour résoudre ce système plus rapidement que ne le ferait une méthode classique comme la méthode du pivot par exemple.

Ecriture sous forme de Lagrange Ainsi le calcul des coefficients a_i du polynôme cherché se ramène à la résolution d'un système de Vandermonde. Sans être très compliqué ceci n'est cependant pas immédiat. Or il peut se faire qu'on n'ait pas absolument besoin des coefficients a_i et qu'on puisse se satisfaire d'exprimer le polynôme d'interpolation dans une base mieux adaptée que la classique base des monômes. Dans cet ordre d'idée, introduisons les $n+1$ polynômes $L_k(X)$ (où $0 \leq k \leq n$) qui vérifient

$$\begin{cases} L_k(x_k) &= 1 \\ L_k(x_j) &= 0 \quad (j \neq k) \end{cases}$$

D'après l'étude qui précède le polynôme $L_k(X)$ existe et est unique. On vérifie aisément que $L_k(X)$ s'écrit explicitement sous la forme

$$L_k(X) = \frac{(X-x_0)...(X-x_{k-1})(X-x_{k+1})...(X-x_n)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}.$$

Ces polynômes forment une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et le polynôme d'interpolation s'exprime dans cette base

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(X).$$

Il est intéressant de remarquer que le polynôme $L_k(X)$ s'écrit aussi

$$L_k(X) = \frac{N(X)}{(X-x_k)N'(x_k)}$$

où $N(X) = (X-x_0)(X-x_1)...(X-x_n)$.

Ecriture sous la forme de Newton L'inconvénient des polynômes $L_k(X)$ est que chacun d'eux fait intervenir tous les points d'interpolation et donc si on rajoute un nouveau point tout calcul fait à partir des polynômes $L_k(X)$ doit être entièrement refait.
Prenons alors les polynômes $N_k(X) = (X-x_0)(X-x_1)...(X-x_{k-1})$ où $0 \leq k \leq n$ (avec $N_0 = 1$). Ces polynômes forment aussi une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et

le polynôme d'interpolation se décompose sur cette base sous la **forme de Newton**

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k N_k(X).$$

Le problème est alors de calculer les coefficients b_k. Pour ce faire définissons les différences divisées successives des valeurs y_i par rapport aux points x_i

$$[y_0] = y_0$$

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \frac{[y_1, ..., y_k] - [y_0, ..., y_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Théorème 15.2.2 *Les coefficients de la décomposition du polynôme d' interpolation de Lagrange de degré n dans la base de Newton sont donnés par*

$$b_k = [y_0, y_1, ..., y_k]$$

où

$$0 \leq k \leq n.$$

Preuve. La formule à démontrer est clairement vraie si on a $n = 0$. Supposons la formule vraie pour les polynômes de degré $n - 1$ interpolant en n points. Soit alors $P_{n-1}(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ et aux valeurs $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ $Q_{n-1}(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_1, x_2, ..., x_n$ et aux valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$ et

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k N_k(X)$$

le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ et aux valeurs $y_0, y_1, ..., y_n$. Il est facile de voir que

$$P_{n-1}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k N_k(X)$$

si bien qu'il reste simplement en vertu de l'hypothèse de récurrence à établir la formule pour le coefficient b_n.

Pour cela définissons

$$\tilde{P}_n(X) = \frac{(X - x_0)Q_{n-1}(X) - (X - x_n)P_{n-1}(X)}{x_n - x_0}.$$

On vérifie que

$$\tilde{P}_n(x_i) = y_i$$

pour $0 \leq i \leq n$. Donc

$$\tilde{P}_n(X) = P(X).$$

En égalant les coefficients du terme de degré n dans l'expression des polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ on obtient la relation cherchée.

En comparant l'expression de Newton du polynôme P_k d'interpolation en $k+1$ points avec celle de Lagrange on trouve en regardant les coefficients des termes de degré k

$$[y_0, y_1, \dots, y_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{N'_{k+1}(x_j)}.$$

Il est clair dans cette représentation que le rajout d'un nouveau point ne fait que rajouter un nouveau terme au polynôme, les autres termes restant identiques.

L'aspect approximation

Le théorème de division des fonctions différentiables Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^{p+1}, où p est un entier naturel. On suppose que f s'annule en un point a de $\mathbb{R}$. Posons

$$g(x) = \int_0^1 f'(a + (x - a)u)du$$

alors $g(x)$ est l'unique fonction continue telle que

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

De plus d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale on voit que la fonction $g(x)$ est de classe C^p et que pour tout $0 \leq q \leq p$

$$g^{(q)}(x) = \int_0^1 u^q f^{(q+1)}(a + (x - a)u)du$$

et par suite

$$|g^{(q)}(x)| \leq \frac{1}{q+1} sup_{t\in[a,x]}|f^{(q+1)}(t)|.$$

Majoration de l'erreur Soit f une fonction de classe C^{n+1}, P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui prend les mêmes valeurs que f aux point $x_0, x_1, ..., x_n$ et I un intervalle compact contenant $x, x_0, x_1, ..., x_n$. Appliquons alors le théorème précédent à $f(x) - P(x)$. On obtient

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)g_0(x)$$

avec

$$|g_0^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1} sup_{t\in I}|f^{(n+1)}(t)|$$

(ne pas oublier que $P^{(n+1)}(x) = 0$)

puis

$$g_0(x) = (x - x_1)g_1(x)$$

avec

$$|g_1^{(n-1)}(x)| \leq \frac{1}{n} sup_{t\in I}|g_0^{(n)}(t)|$$

et ainsi de suite. Si bien que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)| sup_{t\in I}|f^{(n+1)}(t)|$$

L'aspect algorithmique

Le calcul des différences divisées L'algorithme des différences divisées est très simple. Il utilise l'écriture du polynôme d'interpolation sous la forme de Newton. Les coefficients sont alors calculés par la formule de récurrence établie précédemment

$$[y_0] = y_0$$

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \frac{[y_1, ..., y_k] - [y_0, ..., y_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

si bien que le calcul se fait conformément à la figure 15.1.
Le nombre d'opérations à effectuer est en $O(n^2)$.

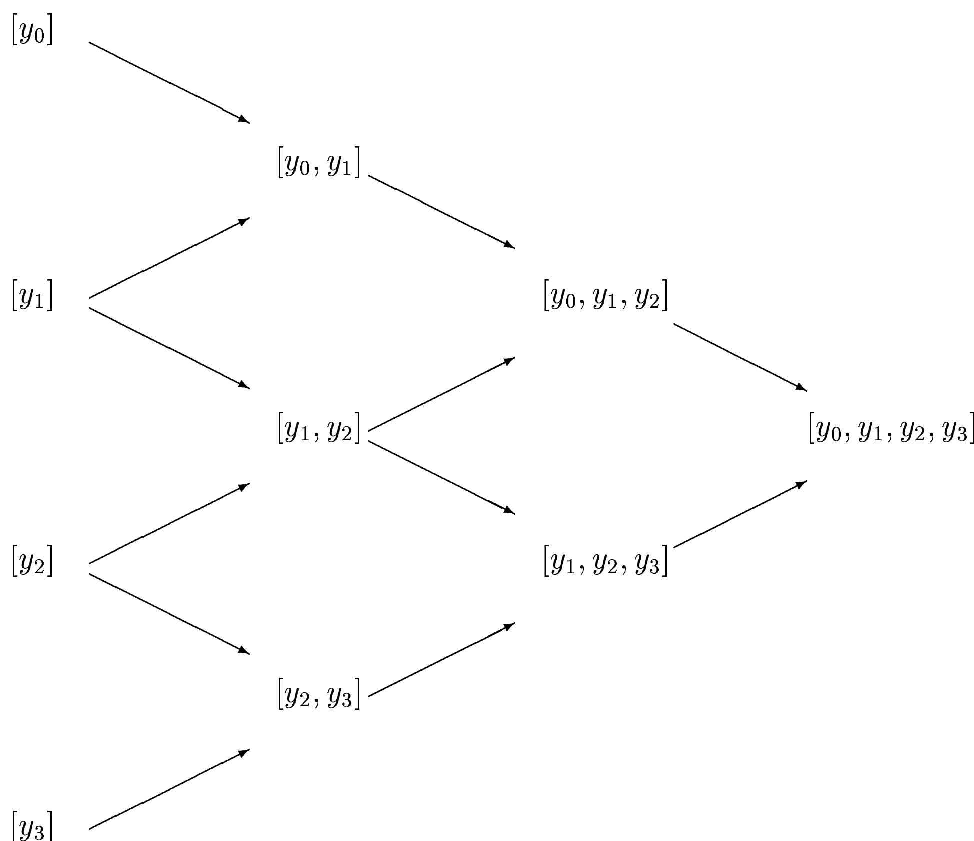


FIG. 15.1 – Le calcul des différences divisées

Résolution d'un système de Vandermonde Nous avons vu que le calcul effectif des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange dans la base naturelle des monômes passe par la résolution d'un système de Vandermonde. Voici un algorithme qui permet de résoudre un tel système. Cet algorithme est basé en fait sur l'algorithme de Hörner pour l'évaluation de polynômes. Il est plus rapide que les algorithmes directs de résolution des systèmes linéaires généraux comme la méthode du pivot de Gauss ou la méthode de Householder qui sont en $O(n^3)$ alors que nous obtenons ici un algorithme en $O(n^2)$.

Soit N un entier ≥ 2. Etant donné $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ un N-uplet de réels deux à deux distincts on note B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre le système

$$BW = Q$$

où Q est la matrice colonne constituée des seconds membres $q_1, q_2, \cdots, q_N$ du système et où W est la matrice colonne constituée des inconnues $w_1, w_2, \cdots, w_N$ du système.

Pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq N$ on pose

$$P_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N} \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

P_j est donc un polynôme en x de degré $N-1$ qui peut s'écrire

$$P_j(x) = \sum_{k=1}^{N} A_{j,k} x^{k-1}$$

En effectuant le produit de la matrice $A = (A_{j,k})_{j,k}$ par la matrice B on constate que

$$AB = (P_j(x_k))_{j,k}$$

ce qui prouve que A est l'inverse de B.
On peut alors écrire que W=AQ. On obtient ainsi les formules

$$w_j = \sum_{k=1}^{N} A_{j,k} q_k.$$

Nous allons dans la suite mettre en place une méthode de résolution qui calcule les coefficients des polynômes P_j, donc qui calcule l'inverse de la

matrice B.Pour calculer les coefficients de P_j on sera amené à calculer les coefficients de

$$N_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq j}}^{N} (x - x_n)$$

et aussi le dénominateur intervenant dans la formule qui définit P_j, c'est à dire le nombre $N_j(x_j)$.

Posons

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_N)$$

$P(x)$ est donc un polynôme de degré N qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = x^N + c_N x^{N-1} + ... + c_2 x + c_1$$

Montrons tout d'abord comment si on connaît les coefficients c_j on peut calculer les coefficients du polynôme

$$N_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n\neq j}}^{N} (x - x_n)$$

Pour cela posons

$$N_j(x) = b_N x^{N-1} + ... + b_2 x + b_1$$

On vérifie immédiatement sur l'expression de $N_j(x)$ que le coefficient du terme de plus haut degré est 1. En remarquant que $P(x) = N_j(x)(x - x_j)$ on établit la formule

$$b_{k-1} = c_k + x_j b_k.$$

Si bien que

$$\begin{cases} b_N = 1 \\ b_{k-1} = c_k + x_j b_k \end{cases}$$

Connaissant les coefficients de N_j il est alors facile de calculer le dénominateur $N_j(x_j)$ intervenant dans la définition de P_j.
En effet posons $t_N = b_N = 1$ et définissons pour tout $k \leq N$

$$t_{k-1} = x_j t_k + b_{k-1}$$

On constate alors que $t_1 = N_j(x_j)$, le calcul proposé pour $N_j(x_j)$ n'étant rien d' autre que l'algorithme de Horner.

Il reste maintenant à calculer les coefficients c_j de P.
Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq N$ on définit

$$Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)$$

et on écrit Q_k sous la forme

$$Q_k(x) = x^k + \alpha_{k,k}x^{k-1} + \alpha_{k,k-1}x^{k-2} + ... + \alpha_{k,1}$$

Il est facile de voir sur l'expression de $Q_1(x) = x - x_1$ que $\alpha_{1,1} = -x_1$.
De la formule

$$Q_k(x) = Q_{k-1}(x)(x - x_k).$$

découlent pour $k = 2, 3, ..., N$ les formules

$$\alpha_{k,k} = \alpha_{k-1,k-1} - x_k$$

$$\alpha_{k,j} = \alpha_{k-1,j-1} - x_k\alpha_{k-1,j} \quad j = k-1, ..., 2$$

ce qui achève l'algorithme.

On peut voir que le nombre d'opérations à faire dans cet algorithme est en $O(N^2)$, la partie la plus coûteuse étant le calcul des coefficients c_k.

Un cas particulier : les points d'interpolation sont les racines n[e] de l'unité

Interpolation de Lagrange et transformée de Fourier discrète On trouvera dans [5] des précisions sur la transformation de Fourier discrète. Rappelons que si $a = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ est une suite finie de n nombres complexes on définit la transformée de Fourier $\widehat{a}$ de la suite a comme étant la suite $\widehat{a} = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, ..., \widehat{a}_{n-1})$ où

$$\widehat{a}_v = \frac{1}{n}\sum_{u=0}^{n-1} a_u e^{-\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

La transformation inverse se calcule facilement (cf. [5]) par

$$a_u = \sum_{v=0}^{n-1} \widehat{a}_v e^{\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

On remarque que

$$\widehat{\widehat{a}}_u = \frac{1}{n} a_{n-u}.$$

A un coefficient près le même algorithme permettra de calculer la transformée de Fourier et son inverse.

Notons

$$P_{\widehat{a}}(X) = \left(\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 X + ... + \widehat{a}_{n-1} X^{n-1}\right)$$

On voit alors que

$$a_u = P_{\widehat{a}}(e^{\frac{2i\pi u}{n}}).$$

Cette dernière remarque met en évidence un aspect très important de la transformée de Fourier discrète : l'aspect interpolation . En effet il est facile de trouver grâce à ce que nous avons vu le polynôme d'interpolation de Lagrange qui prend les valeurs a_u aux points $x_u = e^{\frac{2i\pi u}{n}}$; C'est le polynôme $P_{\widehat{a}}(X)$ dont les coefficients sont donnés par la transformée de Fourier discrète de la suite $a = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$ des valeurs prises aux points d'interpolation .

Le calcul explicite : transformée de Fourier rapide Il existe divers façons proches les une des autres de calculer une transformée de Fourier discrète. Toutes ces variantes sont des algorithmes de transformée de Fourier rapides (FFT). Nous nous placerons ici dans le cas où le nombre d'éléments de la suite à transformer est $n = 2^m$. Pour tout $r > 0$ et tout $0 \leq k \leq 2^r - 1$ posons

$$W_{2^r}^k = e^{-\frac{2ik\pi}{2^r}}.$$

Remarquons que

$$W_{2^r}^k = (W_{2^{r+1}}^k)^2 = (W_{2^{r+1}}^{k+2^r})^2$$
$$W_{2^{r+1}}^k = -W_{2^{r+1}}^{k+2^r}$$

par exemple

$$(W_8^3)^2 = (W_8^7)^2 = W_4^3$$
$$W_8^3 = -W_8^7.$$

On rappelle que si

$$a = (a_0, a_1, ..., a_{2^m-1})$$

et si

$$P_a(X) = \frac{1}{2^m}\left(a_0 + a_1 X + ... + a_{2^m-1} X^{2^m-1}\right)$$

alors
$$\widehat{a}_u = P_a(W_{2^m}^u).$$
Pour tout polynôme
$$P(X) = p_0 + p_1X + ... + p_{2^r-1}X^{2^r-1}$$
notons
$$P_0(X) = p_0 + p_2X + ... + p_{2^r-2}X^{2^{r-1}-1}$$
et
$$P_1(X) = p_1 + p_3X + ... + p_{2^r-1}X^{2^{r-1}-1}$$
alors
$$P(X) = P_0(X^2) + XP_1(X^2)$$
ce qui donne si $0 \leq k \leq 2^{r-1} - 1$
$$P(W_{2^r}^k) = P_0(W_{2^{r-1}}^k) + W_{2^r}^k P_1(W_{2^{r-1}}^k)$$
et
$$P(W_{2^r}^{k+2^{r-1}}) = P_0(W_{2^{r-1}}^k) - W_{2^r}^k P_1(W_{2^{r-1}}^k).$$
Ces dernières formules vont nous donner un algorithme pour calculer les valeurs de la transformée de Fourier.

Remarquons tout d'abord que si on a tabulé les valeurs de $W_{2^m}^k$ alors on dispose aussi des valeurs de $W_{2^r}^k$ pour tout $r \leq m$.

W_8^0	W_8^1	W_8^2	W_8^3	W_8^4 $-W_8^0$	W_8^5 $-W_8^1$	W_8^6 $-W_8^2$	W_8^7 $-W_8^3$
W_4^0		W_4^1		W_4^2 $-W_4^0$		W_4^3 $-W_4^1$	
W_2^0				W_2^1 $-W_2^0$			

Pratique du calcul. Le coefficient $\frac{1}{n}$ n'interviendra qu'à la fin. Pour cela au lieu de calculer avec le polynôme P_a nous calculerons avec $P = nP_a = a_0 + ... + a_{2^m-1}X^{2^m-1}$.
L'exemple $m = 3$ est suffisamment instructif pour décrire l'algorithme. Remarquons que
$$P_{000}(X) = a_0, P_{001}(X) = a_4, P_{010}(X) = a_2, P_{011}(X) = a_6$$

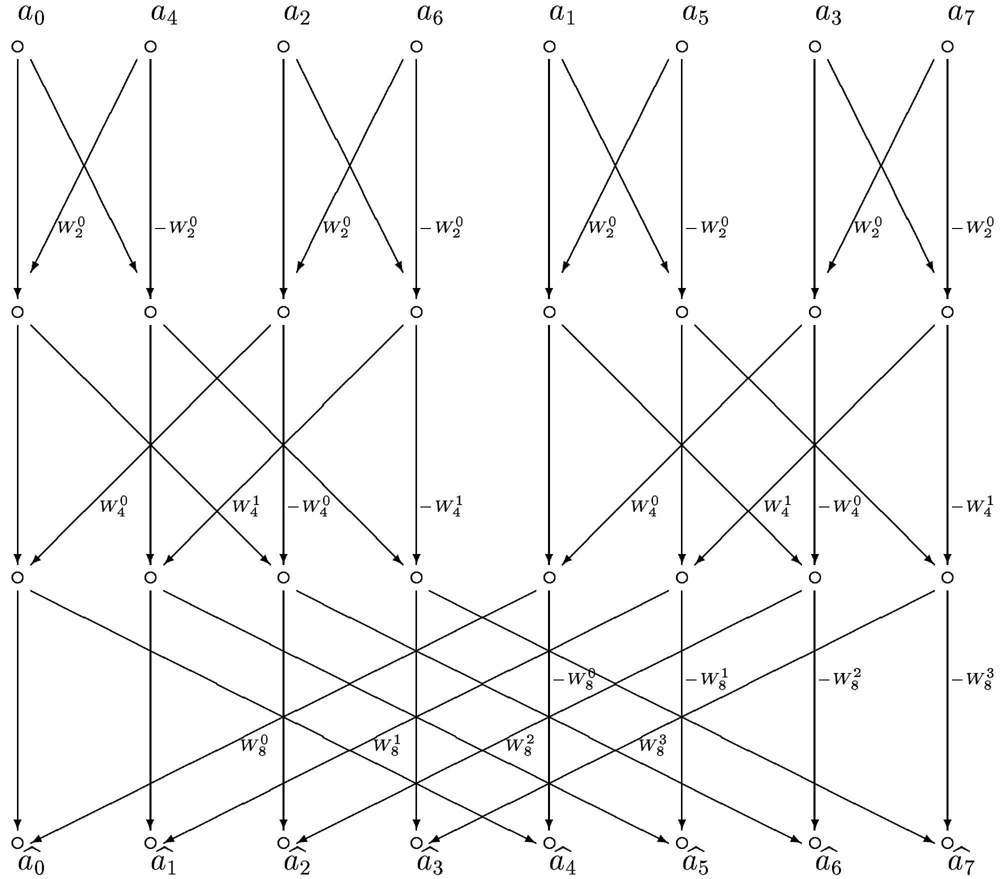


FIG. 15.2 – La FFT sur 8 points

$$P_{100}(X) = a_1, P_{101}(X) = a_5, P_{110}(X) = a_3, P_{111}(X) = a_7.$$

On commence donc à faire une permutation σ des éléments

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$

pour les mettre dans l'ordre

$$a_0, a_4, a_2, a_6, a_5, a_3, a_7.$$

Ceci se fait facilement en remarquant qu'à chaque indice supposé écrit en binaire on fait correspondre l'indice obtenu en écrivant les bits dans l'ordre inverse. Ainsi l'indice $4 = 100$ est transformé en $1 = 001$. la suite du calcul

de la transformée de Fourier se fait en trois étapes indiquées par la figure 15.2 et à la fin on divise les coefficient obtenus par 8.

Appelons M_8^1, M_8^2, M_8^3 les matrices

$$M_8^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_8^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_8^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

S_1, S_2, S_3 les matrices diagonales définies par

$$S_1 = Diag(1, W_2^0, 1, W_2^0, 1, W_2^0, 1, W_2^0)$$
$$S_2 = Diag(1, 1, W_4^0, W_4^1, 1, 1, W_4^0, W_4^1)$$
$$S_3 = Diag(1, 1, 1, 1, W_8^0, W_8^1, W_8^2, W_8^3)$$

et enfin Σ la matrice de la permutation "reverse bit" σ.
Dans ces conditions la matrice F_8 de la transformation de Fourier sur 8 points s'écrit

$$F_8 = \frac{1}{8} M_8^3 S_3 M_8^2 S_2 M_8^1 S_1 \Sigma.$$

Ceci se généralise facilement pour $n = 2^m$. Le nombre d'opérations à effectuer pour calculer cette transformation est de l'ordre de $nlog(n)$.

15.2.3 Le problème général de l'interpolation

Interprétons de manière un peu plus algébrique le problème d'interpolation de Lagrange. En particulier notons g_i la forme linéaire sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à tout polynôme $Q(X)$ fait correspondre $Q(x_i)$. On cherche alors un élément $P(X)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ qui réalise $g_i(P) = y_i$ pour tout i. Remarquons que les g_i forment une base du dual de $\mathbb{C}_n[X]$ et que cette base est la base duale de la base constituée par les L_i.

Nous poserons le problème général de l'interpolation en ces termes :

Soit E un espace vectoriel de dimension n, E^* le dual de E, $(g_i)_i$ une base de E^* et $(y_i)_i$ des nombres. Trouver un élément P de E tel que $g_i(P) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Il est clair que si $(e_i)_i$ est la base de E dont $(g_i)_i$ est la base duale, alors

$$P = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Nous allons voir par la suite quelques exemples qui entrent dans ce cadre général.

15.2.4 Quelques exemples importants

Interpolation d'Hermite

Soient $x_0 < x_1$ et y_0, y_1, y_0', y_1' des nombres réels. On cherche un polynôme P de degré ≤ 3 tel que

$$\begin{cases} P(x_0) & = & y_0 \\ P(x_1) & = & y_1 \\ P'(x_0) & = & y_0' \\ P'(x_1) & = & y_1' \end{cases}$$

Notons E l'espace vectoriel de dimension 4 des polynômes de degré ≤ 3. Définissons les 4 formes linéaires sur E

$$\begin{cases} \delta_{0,x_0}(P) &= P(x_0) \\ \delta_{0,x_1}(P) &= P(x_1) \\ \delta_{1,x_0}(P) &= P'(x_0) \\ \delta_{1,x_1}(P) &= P'(x_1) \end{cases}$$

La question posée est donc de résoudre le problème linéaire suivant : trouver P tel que

$$\begin{cases} \delta_{0,x_0}(P) &= y_0 \\ \delta_{0,x_1}(P) &= y_1 \\ \delta_{1,x_0}(P) &= y'_0 \\ \delta_{1,x_1}(P) &= y'_1 \end{cases}$$

Pour cela cherchons si on peut trouver 4 polynômes $H_{0,x_0}, H_{0,x_1}, H_{1,x_0}, H_{1,x_1}$ tels que

$$\delta_{i,x_j}(H_{k,x_l}) = \begin{cases} 1 \ si \ i = k \ et \ j = l \\ 0 \ sinon \end{cases} .$$

Si on arrive à trouver ces polynômes cela prouvera à la fois que ces polynômes forment une base de E, que les formes linéaires introduites forment une base de E^*, qui est la base duale de la base polynômiale trouvée.

Un simple calcul nous permet de trouver effectivement ces polynômes (ce sont en fait des solutions dans des cas particuliers bien choisis du problème posé) ;

$$H_{0,x_0}(x) = \frac{(x - x_1)^2(3x_0 - x_1 - 2x)}{(x_0 - x_1)^3}$$

$$H_{0,x_1}(x) = \frac{(x - x_0)^2(3x_1 - x_0 - 2x)}{(x_1 - x_0)^3}$$

$$H_{1,x_0}(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_0)}{(x_0 - x_1)^2}$$

$$H_{1,x_1}(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)}{(x_0 - x_1)^2}.$$

Il ressort de toutes ces considérations que le problème a une solution unique (polynôme d'interpolation de Hermite) donnée par

$$P(x) = y_0 H_{0,x_0}(x) + y_1 H_{0,x_1}(x) + y'_0 H_{1,x_0}(x) + y'_1 H_{1,x_1}(x).$$

Si nous sommes partis d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle compact I contenant les points x_0, x_1, et si nous appelons P le polynôme d'interpolation de Hermite associé aux points x_0, x_1 et aux valeurs $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f'(x_0)$, $f'(x_1)$, alors comme dans l'exemple de l'interpolation de Lagrange, l'application répétée du théorème de division des fonctions différentiables nous donne l'approximation

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{4!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \sup_{t \in I} |f^{(4)}(t)|.$$

Interpolation par les splines cubiques

Soit Δ un partage d'un segment $[a, b]$,

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

et $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ une suite de n nombres réels.

Définition 15.2.1 *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est une fonction spline cubique relativement au partage Δ et à Y si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1) f est de classe $\mathcal{C}^2[a, b]$;
2) f coïncide avec un polynôme de degré 3 sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}]$;
3) $f(x_j) = y_j$ pour $j = 1, 2, \cdots, n$.

Nous noterons $\mathcal{S}_{\Delta,Y}$ l'ensemble de ces fonctions splines.

Nous nous proposons de déterminer des fonctions splines cubiques.
Soit donc $f \in \mathcal{S}_{\Delta,Y}$ et posons $M_j = f''(x_j)$. Sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ la dérivée seconde de f est de degré 1 et on a sur cet intervalle

$$f''(x) = M_j \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}.$$

En intégrant deux fois,

$$f(x) = \frac{M_j}{6} \frac{(x_{j+1} - x)^3}{(x_{j+1} - x_j)} + \frac{M_{j+1}}{6} \frac{(x - x_j)^3}{(x_{j+1} - x_j)} + Q(x)$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré 1 que l'on peut présenter sous la forme

$$Q(x) = \alpha(x_{j+1} - x) + \beta(x - x_j).$$

Evaluons α et β en utilisant $f(x_j) = y_j$ et $f(x_{j+1}) = y_{j+1}$. On trouve

$$\alpha = \left(y_j - M_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{6}\right) \frac{1}{(x_{j+1} - x_j)}$$

$$\beta = \left(y_{j+1} - M_{j+1} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{6}\right) \frac{1}{(x_{j+1} - x_j)},$$

si bien que si on pose

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$$

on obtient pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$f(x) = \frac{M_j}{6} \frac{(x_{j+1} - x)^3}{h_{j+1}} + \frac{M_{j+1}}{6} \frac{(x - x_j)^3}{h_{j+1}} +$$

$$\left(y_j - M_j \frac{h_{j+1}^2}{6}\right) \frac{(x_{j+1} - x)}{h_{j+1}} + \left(y_{j+1} - M_{j+1} \frac{h_{j+1}^2}{6}\right) \frac{(x - xj)}{h_{j+1}}.$$

Nous allons exploiter maintenant les conditions sur la dérivée première. Pour $2 \leq j \leq n-1$ on a

$$f'(x_j^+) = -M_j \frac{h_{j+1}}{3} - M_{j+1} \frac{h_{j+1}}{6} + \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}}$$

$$f'(x_j^-) = M_{j-1} \frac{h_j}{6} + M_j \frac{h_j}{3} + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}$$

si bien que

$$\frac{h_j}{6} M_{j-1} + \frac{h_j + h_{j+1}}{3} M_j + \frac{h_{j+1}}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}.$$

On dispose donc de $n-2$ équations linéaires pour déterminer les n inconnues $M_1, M_2, \cdots, M_n$. Il convient donc si on espère avoir une solution unique de donner deux conditions supplémentaires. Pour la suite du calcul nous imposerons donc les valeurs de la dérivée de f en x_1 et en x_n, c'est-à-dire

$$f'(x_1) = y_1'$$

$$f'(x_n) = y'_n.$$

On a alors

$$2M_1 + M_2 = \frac{6}{h_2}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - y'_1\right)$$

et

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right).$$

Si on pose

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_n &= 0 \\ \lambda_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}} \qquad 2 \leq j \leq n-1 \\ \mu_j &= 1 - \lambda_j \qquad 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_1 &= \frac{6}{h_2}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_2} - y'_1\right) \\ b_n &= \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right) \\ b_j &= \frac{6}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j}\right) \qquad 2 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

alors le système à résoudre est

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \mu_4 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ce système est tridiagonal, à diagonale strictement dominante ; il possède une solution et une seule. On peut employer pour un tel système une simplification de la méthode du pivot, qui dans ce cas particulier s'exécute en temps linéaire.

Les fonctions splines cubiques minimisent approximativement l'énergie de flexion d'une tige. En effet si la fonction $g(x)$ représente l'équation d'une tige parfaitement élastique son énergie de flexion est

$$\int_a^b \frac{\left(g''(t)\right)^2 dt}{\left(1+\left(g'(t)\right)^2\right)^{5/2}}$$

et donc si la dérivée de $g(x)$ est petite on peut approcher cette énergie de flexion par

$$\int_a^b \left(g''(t)\right)^2 dt.$$

Nous allons voir que les fonctions splines cubiques minimisent cette dernière expression. Sur $\mathcal{C}^2[a,b]$ on définit un semi-produit scalaire par

$$< f, g >= \int_a^b f''(t)g''(t)dt$$

qui donne la semi-norme

$$|f| = \left(\int_a^b |f''(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Soit $\mathcal{N}_\Delta$ le sous espace de $\mathcal{C}^2[a,b]$ constitué des fonctions nulles aux points x_j et telles que $f'(a) = f'(b) = 0$.

Lemme 15.2.1 *Les espaces $\mathcal{N}_\Delta$ et $\mathcal{S}_{\Delta,Y}$ sont orthogonaux et d'intersection réduite à $\{0\}$.*

Lemme 15.2.2 *Toute fonction $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $f = s + h$ où $s \in \mathcal{S}_{\Delta,Y}$ et $h \in \mathcal{N}_\Delta$.*

Théorème 15.2.3 *Parmi toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ qui vérifient $f(x_j) = y_j$ et les conditions $f'(a) = y'_1$ et $f'(b) = y'_n$ la fonction qui minimise l'énergie de flexion est la spline cubique (l'élément de $\mathcal{S}_{\Delta,Y}$) qui vérifie en outre $f'(a) = y'_1$ et $f'(b) = y'_n$.*

On pourrait aussi montrer le résultat suivant

Théorème 15.2.4 *Parmi toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$ qui vérifient $f(x_j) = y_j$ la fonction qui minimise l'énergie de flexion est la spline cubique (l'élément de $\mathcal{S}_{\Delta,Y}$) qui vérifie en outre $f''(a) = f''(b) = 0$.*

Interpolation par des polynômes trigonométriques

Etant donnés $2n+1$ nombres réels distincts

$$-\pi \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n+1} < \pi$$

et $2n+1$ nombres complexes $y_1, \cdots, y_{2n+1}$ on cherche un polynôme trigonométrique

$$P(x) = \sum_{p=0}^{n} \Big(a_p cos(px) + b_p sin(px) \Big)$$

tel que $P(x_i) = y_i$.

On pourrait étudier directement ce problème, mais ici nous allons plutôt le relier au problème de l'interpolation de Lagrange que nous avons déjà étudié. Pour cela posons pour tout $-n \leq k \leq n$

$$c_k = \frac{1}{2}\Big(a_{|k|} - i\text{Signe}(k) b_{|k|} \Big)$$

alors

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

et aussi

$$e^{inx} P(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} e^{ikx}.$$

En posant $X = e^{ix}$ on obtient

$$e^{inx} P(x) = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} X^k,$$

ce qui ramène notre problème à un problème d'interpolation de Lagrange. Remarquons que dès que les c_k sont connus, on calcule facilement les a_p et les b_p grâce aux formules

$$a_p = c_p + c_{-p}$$

$$b_p = i(c_p - c_{-p}).$$

15.3 Analyse numérique : calcul des intégrales

15.3.1 Introduction

Nous voulons calculer numériquement les intégrales définies

$$\int_a^b f(x)dx$$

où f est une fonction suffisamment régulière pour assurer l'existence des dérivées et des bornes supérieures dont nous aurons besoin.

Les méthodes que nous décrivons **dans un premier temps** s'appuient sur la démarche suivante :

- On découpe l'intervalle d'intégration en N morceaux de même longueur

  $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

  où $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N}$.
- Sur chaque morceau on calcule la valeur approchée de l'intégrale

  $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

  en remplaçant sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ la fonction f par une fonction polynômiale qui interpole f.

Les diverses méthodes qui entrent dans ce cadre diffèrent par le degré des polynômes d'interpolation utilisés et par le choix des points des segments $[x_i, x_{i+1}]$ en lesquels on interpole f. En particulier pour ce dernier point, nous verrons comment choisir au mieux les points d'interpolation. Il faut éviter de confondre les points x_i du partage en N morceaux du segment initial, avec les points des partages des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, que nous serons amenés à introduire pour appliquer sur ces intervalles des méthodes interpolatoires.

Comme nous le verrons ces méthodes peuvent être éventuellement complétées par une méthode d'accélération de convergence. Enfin nous donnerons un abord purement analytique d'une classe de formules de calcul approchée d'intégrales.

15.3.2 Mise en œuvre de méthodes interpolatoires

Dans toute cette subsection pour la clarté des calculs et des méthodes, nous travaillerons sur l'intervalle $[-1, 1]$ au lieu de $[x_i, x_{i+1}]$, puis donnerons les formules qu'on obtient de la même façon sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, et enfin nous sommerons ces diverses formules pour obtenir l'approximation de l'intégrale sur $[a, b]$. Dans chaque cas nous noterons e l'erreur de la méthode employée sur $[-1, 1]$, e_i l'erreur de la méthode employée sur $[x_i, x_{i+1}]$ et enfin E l'erreur globale introduite sur le segment $[a, b]$.
Signalons enfin que **nous supposerons la fonction f à intégrer sur le segment $[a, b]$ continument dérivable autant de fois qu'il le faut** pour pouvoir appliquer les théorèmes permettant l'établissement des majorations des erreurs. En particulier on aura à appliquer souvant les théorèmes de majoration de la différence d'une fonction et d'un de ses polynômes interpolateurs.

Nous noterons

$$m^{(p)}(f) = \sup_{t \in [-1,1]} \left| f^{(p)}(t) \right|,$$

$$m_i^{(p)}(f) = \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} \left| f^{(p)}(t) \right|,$$

$$M^{(p)}(f) = \sup_{t \in [a,b]} \left| f^{(p)}(t) \right|.$$

Méthode des rectangles

La méthode que nous présentons mérite à peine le nom de méthode numérique, car elle ne donne pas un calcul efficace et n'est pas employée à cet usage. Cependant elle est importante pour la clarté de l'exposé, car elle initialise en quelque sorte un processus qui va nous conduire à des méthodes plus efficaces. Grâce à elle nous pourrons présenter et illustrer un certain nombre de problèmes de fond.

La méthode des rectangles, inspirée de la définition même de l'intégrale de Riemann consiste à supposer la fonction constante sur tout l'intervalle $[-1, 1]$, la valeur de la constante étant celle prise en un point déterminé par la fonction. Nous prendrons ici la valeur de la fonction au point -1 (méthode des

rectangles à gauche). Remarquons qu'il s'agit bien d'une méthode d'interpolation de Lagrange en un point par un polynôme de degré zéro. Ainsi

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(-1)dt + e = 2f(-1) + e.$$

En écrivant

$$f(u) = f(-1) + \int_{-1}^{u} f'(t)dt,$$

on obtient

$$\left| \int_{-1}^{1} f(u)du - 2f(-1) \right| \leq m^{(1)}(f) \int_{-1}^{1} (u+1)du,$$

ou encore

$$|e| \leq 2m^{(1)}(f).$$

Un calcul analogue sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donne

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = (x_{i+1} - x_i)f(x_i) + e_i,$$

avec

$$|e_i| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} m_i^{(1)}(f).$$

Enfin sur l'intervalle $[a, b]$ nous obtenons la formule globale

$$\int_{a}^{b} f(u)du = \frac{(b-a)}{N}[f(x_0) + \cdots + f(x_{N-1})] + E,$$

avec

$$|E| \leq \frac{(b-a)^2}{N} M^{(1)}(f).$$

Méthode du milieu

La métode des rectangles utilise la valeur de la fonction f en un point déterminé de l'intervalle. Il faudrait voir si un bon choix de ce point ne conduirait pas à une optimisation de la "qualité de la méthode". Encore faudrait il donner un sens à cette expression, ce que nous ferons par la suite.

En attendant exposons la méthode du milieu qui consiste à utiliser comme valeur approchée de la fonction sur l'intervalle $[-1,1]$, sa valeur au point milieu (c'est-à-dire en 0). Ainsi

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(0)dt + e = 2f(0) + e$$

En écrivant

$$f(u) = f(0) + \int_{0}^{u} f'(t)dt,$$

on obtient

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = 2f(0) + \int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{u} f'(t)dt \right) du.$$

Or la méthode d'intégration par partie appliquée aux fonctions 1 et $f'(t)$ en dérivant $f'(t)$ et en intégrant 1 (on choisit $t-u$ comme primitive de la fonction 1) nous donne

$$\int_{0}^{u} f'(t)dt = uf'(0) - \int_{0}^{u} (t-u) f^{(2)}(t)dt.$$

Donc

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{u} f'(t)dt \right) du = -\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{u} (t-u) f^{(2)}(t)dt \right) du.$$

On en conclut que

$$|e| = \left| \int_{-1}^{1} f(u)du - 2f(0) \right| \leq 1/3 m^{(2)}(f).$$

Un calcul analogue sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ donne

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = (x_{i+1} - x_i) f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + e_i$$

avec

$$|e_i| \leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{24} m_i^{(2)}(f).$$

Sur l'intervalle $[a,b]$ on obtient par sommation

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{(b-a)}{N} [f(x'_0) + \cdots + f(x'_{N-1})] + E$$

où

$$x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

et où

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} M^{(2)}(f).$$

Remarques concernant les deux méthodes précédentes

Ces deux méthodes sont toutes les deux basées sur une interpolation de degré 0 (c'est à dire par une constante). Cependant la deuxième a été en quelque sorte optimisée en choisissant un bon point d'interpolation. Pourquoi dire que cette deuxième méthode est meilleure que la première ? Ceci pour au moins deux raisons : d'une part l'erreur E est en $1/N$ dans la première méthode et en $1/N^2$ dans la deuxième, d'autre part la première méthode donne un calcul exact pour la classe des polynômes constants alors que la deuxième donne un calcul exact pour une classe plus vaste, celle des polynômes de degré 1 (ce qui ne veut pas dire qu'au hasard des choix, on ne puisse pas tomber sur des fonctions particulières autres, où l'une ou l'autre des formules donne une valeur exacte). Nous serons amenés plus tard à préciser ces critères de comparaison.

Méthode des trapèzes

Passons maintenant à une interpolation de Lagrange de degré 1 (c'est-à-dire par une fonction affine) aux bornes de l'intervalle. Ainsi sur l'intervalle $[-1, 1]$ on approchera $f(u)$ par

$$\frac{(u+1)f(1) + (u-1)f(-1)}{2}.$$

Alors on aura

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = f(1) + f(-1) + e.$$

Le calcul de l'erreur e s'effectue en introduisant l'erreur dûe à l'interpolation de Lagrange, erreur calculée dans le chapitre portant sur l'interpolation :

$$\left| f(u) - \frac{(u+1)f(1) + (u-1)f(-1)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} |(u-1)(u+1)| m^{(2)}(f).$$

En intégrant cette inégalité sur $[-1,1]$ on obtient la majoration suivante de l'erreur

$$|e| \leq \frac{2}{3} m^{(2)}(f).$$

Des calculs analogues sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ nous donnent

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du = \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] + e_i$$

avec

$$|e_i| \leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} m_i^{(2)}(f).$$

Enfin sur l'intervalle $[a,b]$ on peut écrire

$$\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(x_0)+f(x_N)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{N-1})\right] + E$$

avec

$$|E| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} M^{(2)}(f).$$

Méthode des tangentes

Cette méthode consiste à approcher la fonction par sa tangente au point milieu de l'intervalle. C'est donc une interpolation d'Hermite par un polynôme de degré 1. Des considérations géométriques très simples montrent que cette méthode se ramène exactement à la méthode du milieu. Ainsi on dispose d'une piste pour expliquer que la méthode du milieu soit meilleure que celle des rectangles : en bien choisissant le point d'interpolation de degré 0, tout se passe comme si on disposait d'une interpolation de degré 1.

Méthode de Gauss

Comme dans le cas de l'interpolation de Lagrange de degré 0, nous allons essayer dans le cas de l'interpolation de Lagrange de degré 1, de choisir au mieux les deux points d'interpolation de manière à améliorer la méthode. Ainsi pour la méthode des trapèzes les point d'interpolation étaient aux bornes de l'intervalle, pour la méthode de Gauss les points d'interpolation seront des points bien choisis de l'intervalle.

On se place dans l'espace $\mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré ≤ 1 sur $\mathbb{R}$. Soient α et β tels que $-1 \leq \alpha < \beta \leq 1$. On note δ_α et δ_β les formes linéaires sur $\mathbb{R}_1[X]$ définies par $\delta_u(P) = P(u)$. Si on note

$$P_\alpha(X) = \frac{X - \beta}{\alpha - \beta}$$

et

$$P_\beta(X) = \frac{X - \alpha}{\beta - \alpha}$$

alors $\delta_u(P_v) = \delta_{u,v}$ (0 si $u \neq v$, 1 si $u = v$). On en conclut que $(\delta_\alpha, \delta_\beta)$ est une base du dual de $\mathbb{R}_1[X]$. Donc la forme linéaire I su $\mathbb{R}_1[X]$ définie par

$$I(P) = \int_{-1}^{1} f(u)du$$

se décompose sous la forme

$$I = \lambda_\alpha \delta_\alpha + \lambda_\beta \delta_\beta.$$

Cette formule appliquée aux polynômes P_α et P_β donne les valeurs explicites des constantes λ_α et λ_β, ce qui permet d'écrire

$$I = \frac{2\beta}{\beta - \alpha}\delta_\alpha + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta}\delta_\beta.$$

Ceci veut dire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$ on a

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = \frac{2\beta}{\beta - \alpha}P(\alpha) + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta}P(\beta).$$

Pour une fonction f on va donc avec cette méthode écrire

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = \frac{2\beta}{\beta - \alpha}f(\alpha) + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta}f(\beta) + e,$$

et l'erreur e est nulle pour les polynômes de degré ≤ 1. Peut-on choisir les points α et β pour que la formule reste exacte ($e = 0$) pour un degré supérieur ? La réponse est donnée par :

Proposition 15.3.1 *Il existe un couple et un seul de points α et β tels que pour tout polynôme P de degré ≤ 3 on ait*

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = \frac{2\beta}{\beta - \alpha}P(\alpha) + \frac{2\alpha}{\alpha - \beta}P(\beta);$$

ces points sont

$$\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

De plus, quels que soient les points α et β il existe un polynôme de degré 4 *qui ne vérifie pas la formule précédente.*

Preuve : le calcul se fait à partir de la formule exacte pour les polynômes de degré ≤ 1 en imposant que cette formule reste exacte pour le polynôme X^2 et le polynôme X^3 (ce qui est nécessaire et suffisant pour que la formule reste exacte pour les polynômes de degré ≤ 3). Un calcul simple nous donne les points α et β attendus ainsi que les coefficients explicites de la formule.

Proposition 15.3.2 *Pour tout polynôme de degré ≤ 3 on a*

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = P(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + P(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

La **méthode de Gauss** consiste donc à utiliser cette formule pour approcher l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + e.$$

La majoration de l'erreur e se fait maintenant en utilisant un polynôme de degré ≤ 3 qui interpole f. Plus précisément on considère le polynôme d'Hermite H de degré ≤ 3 tel que

$$H(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad H(\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$H'(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = f'(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \quad H'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = f'(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Dans ces conditions

$$\int_{-1}^{1} H(u)du = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

donc

$$|e| = \left| \int_{-1}^{1} f(u)du - \int_{-1}^{1} H(u)du \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(u) - H(u)|du.$$

On sait alors (cf. chapitre sur l'interpolation) que sur $[-1, 1]$

$$|f(u) - H(u)| \leq \frac{1}{24} \left| u^2 - \frac{1}{3} \right|^2 m^{(4)}(f),$$

d'où on tire par intégration

$$|e| \leq \frac{m^{(4)}(f)}{135}.$$

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient de manière analogue

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left[f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{3}} \right) + f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2\sqrt{3}} \right) \right] + e_i$$

avec

$$|e_i| \leq \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^5 \frac{m_i^{(4)}(f)}{135}.$$

Par sommation on obtient sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(u)du = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du + E$$

avec

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{N^4} \frac{M^{(4)}(f)}{4320}.$$

Remarque : En fait bien qu'au départ on ait travaillé sur une interpolation de Lagrange de degré 1, tout se passe ensuite de la même façon que pour une interpolation d'Hermite de degré 3. C'est ce qui fait la performance de la méthode.

Méthode de Simpson

Nous partons maintenant de l'interpolation de Lagrange de degré 2 (par une fonction parabolique) aux bornes de l'intervalle et en un point γ tel que $-1 < \gamma < 1$. Nous employons une démarche analogue à celle du paragraphe

précédent. Notons $\delta_{-1}, \delta_\gamma, \delta_1$ les formes linéaires sur l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré ≤ 2 définies par

$$\delta_u(P) = P(u).$$

Les polynômes

$$P_{-1}(X) = \frac{(X-1)(X-\gamma)}{2(1+\gamma)},$$
$$P_\gamma(X) = \frac{(X-1)(X+1)}{(\gamma-1)(\gamma+1)},$$
$$P_1(X) = \frac{(X+1)(X-\gamma)}{2(1-\gamma)},$$

vérifient $\delta_u(P_v) = \delta_{u,v}$. On en déduit que $(\delta_{-1}, \delta_\gamma, \delta_1)$ est une base du dual de $\mathbb{R}_2[X]$ et donc que la forme linéaire I définie par

$$I(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt$$

se décompose sur cette base

$$I = \lambda_{-1}\delta_{-1} + \lambda_\gamma\delta_\gamma + \lambda_1\delta_1.$$

Ceci veut dire que pour tout polynôme P de degré ≤ 2 on a

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda_{-1}P(-1) + \lambda_\gamma P(\gamma) + \lambda_1 P(1).$$

Par un bon choix du point γ on va voir que cette formule persiste pour les polynômes de degré ≤ 3. On laisse au lecteur d'établir la proposition suivante

Proposition 15.3.3 *Il existe un point γ et un seul tel que pour tout polynôme de degré ≤ 3 on ait*

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda_{-1}P(-1) + \lambda_\gamma P(\gamma) + \lambda_1 P(1).$$

Cette valeur de γ est 0. De plus il existe un polynôme de degré 4 pour lequel cette formule n'a pas lieu.

Ce point $\gamma = 0$ étant choisi on obtient la formule dite des 3 niveaux.

Proposition 15.3.4 *Pour tout polynôme de degré* ≤ 3

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \frac{1}{3}[P(-1) + P(1) + 4P(0)].$$

La **méthode de Simpson** consiste donc à utiliser cette formule pour approcher l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = \frac{1}{3}[f(-1) + f(1) + 4f(0)] + e.$$

Soit H le polynôme de degré ≤ 3 tel que

$$H(-1) = f(-1) \quad H(0) = f(0) \quad H(1) = f(1) \quad H'(0) = f'(0).$$

On a alors

$$|e| = \left| \int_{-1}^{1} f(u)du - \int_{-1}^{1} H(u)du \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(u) - H(u)|\, du.$$

On sait (cf. chapitre sur l'interpolation) que sur $[-1, 1]$

$$|f(u) - H(u)| \leq \frac{1}{4!} u^2 |(u-1)(u+1)| m^{(4)}(f)$$

ce qui donne par intégration

$$|e| \leq \frac{m^{(4)}(f)}{90}.$$

Sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du = \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left[f(x_i) + f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] + e_i$$

avec

$$|e_i| \leq \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^5 \frac{m_i^{(4)}(f)}{90}.$$

Sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier on peut écrire

$$\int_a^b f(u)du = \frac{b-a}{6N} \left[f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right] + E$$

avec

$$|E| \leq \frac{(b-a)^5}{N^4} \frac{M^{(4)}(f)}{2880}.$$

L'erreur est là aussi comme pour la méthode de Gauss en $1/N^4$, mais avec des coefficients un peu moins bons. Cependant la formule ne fait pas intervenir comme dans celle de Gauss des nombres "compliqués" ($\sqrt{3}$) ce qui explique qu'elle ait été plus prisée avant l'apparition des ordinateurs.

Peut on là aussi optimiser mieux la méthode en choisissant de manière astucieuse les **trois points** d'interpolation ? Ceci est en partie l'objet de l'étude plus générale du paragraphe suivant.

Méthodes interpolatoires et polynômes orthogonaux

Soient $P_0, P_1, \cdots, P_n$ les $n+1$ premiers polynômes de Legendre. Rappelons que les polynômes de Legendre forment l'unique suite de polynômes telle que

a) $deg(P_i) = i$

b) $\int_{-1}^{1} P_i(u)P_j(u)du = 0 \quad (i \neq j)$

c) $P_i(1) = 1$.

Appelons $a_1, \cdots, a_n$ les racines de P_n ; elles sont distinctes et appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$. Les formes linéaires $(\delta_{a_i}, \cdots, \delta_{a_n})$ définies par $\delta_{a_i}(P) = P(a_i)$ forment une base du dual de l'espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leq n-1$ (espace de dimension n). On en conclut que la forme linéaire I définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

$$I(P) = \int_{-1}^{1} P(u)du$$

se décompose sur cette base sous la forme

$$I = \lambda_{a_1}\delta_{a_1} + \cdots + \lambda_{a_n}\delta_{a_n},$$

ce qui veut dire que pour tout polynôme P de degré $\leq n-1$ on a

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = \lambda_{a_1}P(a_1) + \cdots + \lambda_{a_n}P(a_n).$$

Le choix des racines du polynôme de Legendre P_n pour les points a_i est un très bon choix dans le mesure où

Proposition 15.3.5 *Pour tout polynôme de degré $\leq 2n-1$ on a*

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = \lambda_{a_1} P(a_1) + \cdots + \lambda_{a_n} P(a_n).$$

Preuve : Il suffit de montrer que la formule est vraie pour les polynômes d'une base de l'espace $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ des polynômes de degré $\leq 2n-1$. La famille $(P_0, \cdots, P_{n-1}, P_0P_n, \cdots, P_{n-1}P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (tous les degrés sont représentés une fois et une seule). Il est clair que $P_0, \cdots, P_{n-1}$ vérifient la formule puisque ces polynômes sont de degré $\leq n-1$. Quand aux P_iP_n $(0 \leq i \leq n-1)$ il est clair en utilisant l'orthogonalité de la suite des polynômes de Legendre que $\int_{-1}^{1} P_i(u)P_n(u)du = 0$ et que sachant que les a_i sont les racines de P_n, $\delta_i(P_jP_n) = P_j(a_i)P_n(a_i) = 0$. Ils vérifient donc eux ausi la formule.

Toute autre famille de points est moins bonne que la famille (a_i).

Proposition 15.3.6 *Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$ dont l'un au moins n'est pas racine du polynôme de Legendre de degré n. Alors il existe un polynôme Q de degré $\leq 2n-1$ tel que*

$$\int_{-1}^{1} Q(u)du \neq \lambda_{\alpha_1} Q(\alpha_1) + \cdots + \lambda_{\alpha_n} Q(\alpha_n).$$

Preuve : Posons $Q_n(X) = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$.Par hypothèse, Q_n n'est pas proportionnel au polynôme de Legendre P_n, il n'est donc pas orthogonal au sous espace des polynômes de degré $\leq n-1$. Il existe un polynôme R de ce sous espace tel que $\int_{-1}^{1} R(u)Q_n(u)du \neq 0$. Il suffit alors de prendre $Q = RQ_n$.

Cette propriété optimale des racines des polynômes de Legendre peut être utilisée pour avoir une meilleure majoration de l'erreur quand on remplace l'intégrale à calculer par l'intégrale du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $\leq n-1$ en n points de l'intervalle. C'est ainsi que nous avons procédé pour la méthode de Gauss, avec $n = 2$. Les point $-1/\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{3}$ sont les racines du polynôme de Legendre de degré 2 ($P_2(X) = \frac{3X^2-1}{2}$).

Dans le cas de l'interpolation de degré 2 (avec les notations précédentes $n = 3$), nous pouvons obtenir mieux que par la méthode de Simpson et par la méthode de Gauss. La méthode de Simpson en effet est une méthode utilisant

l'interpolation de degré 2, partiellement optimisée par le choix du point milieu de l'intervalle, mais qui n'est pas complètement optimisée puisque les deux autres points d'interpolation sont les bords de l'intervalle et non pas des racines du polynôme de Legendre de degré 3. Le polynôme de Legendre de degré 3 est

$$P_3(X) = \frac{5X^2 - 3X}{2},$$

ce qui donne pour racines

$$a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$$

Un calcul simple donne alors pour tout polynôme P de degré ≤ 5

$$\int_{-1}^{1} P(u)du = \frac{1}{9}\left[5P\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + 8P(0) + 5P\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\right].$$

Ainsi pour toute fonction f de classe C^5 on a

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = \frac{1}{9}\left[5P\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + 8P(0) + 5P\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\right] + e$$

où $|e|$ se majore en utilisant l'inégalité

$$|f(u) - P(u)| \leq \frac{1}{6!}u^2(u^2 - 3/5)^2 m^{(6)}(f),$$

ce qui par intégration fournit

$$|e| \leq \frac{1}{15750} m^{(6)}(f).$$

Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a une erreur

$$e_i \leq \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)^7 \frac{m_i^{(6)}(f)}{15750},$$

et sur $[a, b]$ une erreur

$$|E| \leq \frac{(b-a)^7}{N^6} \frac{M^{(6)}(f)}{15750 \times 128}.$$

15.3.3 Présentation générale des quadratures élémentaires - Ordre d'une méthode

Toutes les méthodes vues jusqu'à présent entrent dans le cadre général suivant (**méthodes de quadrature élémentaires**). On a sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ une formule du type

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)du = (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} f(\eta_{i,j}) + e_i,$$

où

$$\eta_{i,j} \in [x_i, x_{i+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} = 1.$$

On essaie d'adapter les paramètres pour que la méthode soit la meilleure possible.

Définition 15.3.1 *On dit qu'une méthode de quadrature est* **d'ordre** N *si la formule approchée est exacte pour les polynômes de degré* $\leq N$ *et inexacte pour au moins un polynôme de degré* $N+1$.

Remarquons que puisque $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} = 1$, une méthode de quadrature élémentaire est toujours au moins d'ordre 0.
Le lecteur est invité à préciser les paramètres qui correspondent aux diverses méthodes décrites précédemment.

15.3.4 Accélération de convergence - Formule de Richardson - Méthode de Romberg

La méthode que nous allons décrire maintenant part d'une méthode d'accélération de convergence sur les suites.

Formule de Richardson

Soit u une suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel a. On suppose que

$$u_n - a = \lambda k^n + O(k'^n)$$

où k et k' sont des réels tels que $0 < |k'| < |k| < 1$ et où λ est un réel non nul.
Alors

$$u_{n+1} - a = \lambda k^{n+1} + O(k'^n)$$
$$ku_n - ka = \lambda k^{n+1} + O(k'^n)$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k} - a = O(k'^n).$$

On construit de cette manière une suite

$$v_n = \frac{u_{n+1} - ku_n}{1-k}$$

qui converge vers a plus vite que la suite initiale u.

Plus généralement on peut supposer que

$$u_n - a = \lambda_1 k_1^n + \lambda_2 k_2^n + \cdots + \lambda_p k_p^n + O(k_{p+1}^n)$$

où

$$0 < |k_{p+1}| < |k_p| < \cdots < |k_1| < 1$$

et où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels non nuls. Pour toute suite w, notons $R_k w$ la suite définie par

$$R_k w_n = \frac{w_{n+1} - kw_n}{1-k}.$$

Alors

$$R_{k_1} u_n = \frac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1-k_1}.$$

Puisque

$$u_{n+1} - a = \lambda_1 k_1^{n+1} + \lambda_2 k_2^{n+1} + \cdots + \lambda_p k_p^{n+1} + O(k_{p+1}^n)$$

et que

$$k_1 u_n - k_1 a = \lambda_1 k_1^{n+1} + \lambda_2 k_1 k_2^n + \cdots + \lambda_p k_1 k_p^n + O(k_{p+1}^n)$$

on obtient

$$u_{n+1} - k_1 u_n - (a - k_1 a) = (\lambda'_2 k_2^n + \cdots + \lambda'_p k_p^n)(1-k_1) + O(k_{p+1}^n)$$

où

$$\lambda_2' = \lambda_2 \frac{(k_2 - k_1)}{1 - k_1}, \cdots, \lambda_p' = \lambda_p \frac{(k_p - k_1)}{1 - k_1}.$$

On en déduit que

$$R_{k_1} u_n - a = \lambda_2' k_2^n + \cdots + \lambda_p' k_p^n) + O(k_{p+1}^n).$$

Par conséquent on peut itérer le procédé et on obtient alors

$$R_{k_p} R_{k_{p-1}} \cdots R_{k_1} u_n - a = O(k_{p+1}^n).$$

Remarque1 : Reprenons la formule de Richardson à l'ordre 1. Il se peut que k ne soit pas connu. On pose alors

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \mu_n u_n}{1 - \mu_n}$$

où

$$\mu_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}.$$

Dans ces conditions

$$\mu_n - k = O\left((k'/k)^n\right),$$

donc

$$v_n - a = O(k'^n).$$

Remarque 2 : On peut donner une version continue de la formule de Richardson.
Soit $f(y)$ telle que $\lim_{y \to 0} f(y) = \alpha_0$. On suppose que

$$f(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \cdots + \alpha_p y^p + O(y^{p+1}).$$

Soit alors $0 < r < 1$ et $y_0 > 0$.
Formons la suite

$$A_{m,0} = f(r^m y_0),$$

et remarquons que

$$\lim_{m \to \infty} A_{m,0} = \alpha_0,$$

$$A_{m,0} = \alpha_0 + \alpha_1 y_0 r^m + \cdots + \alpha_p y_0^p (r^p)^m + O\left((r^{p+1})^m\right).$$

Donc en posant $k_1 = r, \cdots, k_p = r^p$ on se ramène à la formule de Richardson précédente. Plus précisément, pour $0 \leq n \leq p-1$ on définit

$$A_{m,n+1} = \frac{A_{m,n} - r^{n+1} A_{m-1,n}}{1 - r^{n+1}}.$$

Dans ces conditions

$$A_{m,p} - \alpha_0 = O\left((r^{p+1})^m\right).$$

Méthode de Romberg

Nous allons montrer comment marche cette méthode .
Découpons l'intervalle $[a, b]$ par un partage équidistant en $N = 2^n$ morceaux et posons $h = (b-a)/2^n$. Appelons

$$I_{2^n} = 1/2h[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^n-1} f(x_i)]$$

la valeur approchée de l'intégrale donnée par la méthode des trapèzes.
La formule d'Euler-Maclaurin nous donne

$$\int_a^b f(u)du - I_{2^n} = \alpha(1/4)^n + O\left((1/8)^n\right).$$

On peut donc appliquer la méthode de Richardson à l'ordre 1 avec $k = 1/4$ et $k' = 1/8$. On pourra remarquer que dans ce cas on obtient la formule donnée par la méthode de Simpson sur 2^{n-1} intervalles. Il faut appliquer la méthode de Richardson à un ordre ≥ 3 pour trouver une formule qui n'est pas donnée par les considérations des paragraphes précédents.

Bibliographie

[1] **J.P. Demailly** *Analyse numérique et équations différentielles* Presses Universitaires de Grenoble 1991

[2] **I. Glazman, Y. Liubitch** *Analyse Linéaire dans les Espaces de Dimensions Finies* Mir-Moscou 1972

[3] **M.W. Hirsh, S. Smale** *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* Academic Press 1974

[4] **J.L. Ovaert, J.L. Verley** *Algèbre Vol.1* Cedic Nathan (Coll. Epistemon) 1981

[5] **R. Rolland** *Groupes finis commutatifs et transformations de Fourier discrètes* Cours de L'ES2I 1992 (disponible par ftp sur iml.univ-mrs.fr)

Index